

A2

ضمیمہ A2: ریاضیاتی موڈلنگ (MATHEMATICAL MODELLING)

A2.1 تعارف (INTRODUCTION)

1. ایک جوان انسانی جسم میں تقریباً $1,50,000$ کلو میٹر شریان اور نبض ہوتی ہیں جو خون لے کر چلتی ہے۔
2. انسانی دل 60 سیکنڈ میں جسم میں 5 سے 6 لیٹر خون پمپ کرتا ہے۔
3. سورج کی سطح پر درجہ حرارت تقریباً $6,000^{\circ}\text{C}$ ہوتا ہے۔

کیا آپ نے کبھی یہ سوچا ہے کہ ہمارے سائنس دانوں اور ریاضی دانوں نے کس طرح ان نتائج کا اندازہ لگایا ہوگا؟ کیا انہوں نے کسی جوان جسم میں سے شریان اور نبضوں کو کھینچ کر اس کی پیمائش کی ہوگی؟ کیا انہوں نے خون نکال کر یہ نتائج اخذ کئے۔ کیا انہوں نے تھرمامیٹر کے ساتھ سورج کا سفر کیا تھا اور اس کا درجہ حرارت ناپا تھا۔ یقیناً نہیں، تو کس طرح سے ان کو یہ اعداد شمار حاصل ہوئے؟

اس کا جواب ریاضیاتی موڈلنگ میں مضمر ہے، جس کا تعارف ہم نے کلاس IX میں دیا تھا۔ یاد کیجئے کہ ریاضیاتی موڈل کسی روزمرہ کی زندگی کی صورت حال کا ریاضیاتی بیان ہے مزید یاد کیجئے کہ ریاضیاتی موڈلنگ، کسی مسئلہ کے ریاضیاتی موڈل کی تخلیق اور اس کا استعمال مسئلہ کو حل کرنے اور اس کا تجزیہ کرنے کا علم ہے۔

اس لئے ریاضیاتی موڈلنگ میں ہم اصل زندگی کے مسئلہ کو لیتے اور اسکو معادل ریاضیاتی مسئلہ میں تبدیل کرتے ہیں اس ریاضیاتی مسئلہ کو حل کرتے ہیں اور اس کو حل کی ترجمان اصل زندگی کی صورت حال میں کرتے ہیں۔ اور پھر یہ جانچ کرنا بہت اہم ہوتا ہے کہ جو حال حاصل ہوا ہے اس کا کوئی مطلب یا مفہوم بھی ہے یا نہیں دو مرحلہ موڈل کی validities سے کچھ مثالیں جہاں ریاضیاتی موڈلنگ کی بہت اہمیت ہیں۔

(i) کسی دریا کی چوڑائی اور گہرائی وہاں سے معلوم کرنا جہاں پہنچانہ جاسکے۔

- (ii) زمین اور دوسری سیاروں کی کمیت کا اندازہ لگانا۔
- (iii) زمین اور دوسرے سیاروں کے درمیان فاصلہ معلوم کرنا۔
- (iv) کسی ملک میں مانسون کی آمد کی پیشین گوئی کرنا۔
- (v) اسٹاک مارکیٹ کے رجحان کی پیشین گوئی کرنا۔
- (vi) کسی شخص کے جسم میں موجود خون کے حجم کا اندازہ لگانا۔
- (vii) کسی شہر کی 10 سال بعد کی آبادی کی پیشین گوئی کرنا۔
- (viii) ایک درخت میں پتیوں کی تعداد کا اندازہ لگانا۔
- (ix) شہر کے ماحول میں مختلف آلودگیوں کے PPM کا اندازہ لگانا۔
- (x) ماحول میں آلودگیوں کے اثر کا اندازہ لگانا۔
- (ix) سورج کی سطح پر درجہ حرارت کا اندازہ لگانا۔

اس باب میں ریاضیاتی موڈلنگ کے عمل پر نظر ثانی کریں گے اور اپنے اطراف کی دنیا کی مثالیں لے کر اس کی وضاحت کریں گے۔ سیکشن 2.2 میں ہم آپ کو موڈل بنانے کے تمام مراحل سے روشناس کرائیں گے۔ سیکشن 2.3 میں ہم مختلف قسم کی مثالوں کو حل کریں گے، سیکشن 2.4 میں ریاضیاتی موڈلنگ کی اہمیت کی وجہ پر غور کریں گے۔

یاد رکھنے کا ایک نقطہ یہ بھی ہے کہ اس باب میں ہمارا مقصد آپ کو ایک اہم طریقہ سے روشناس کرانا ہے جس میں ریاضی روزمرہ کے مسائل کو حل کرنے میں مددگار ثابت ہوتی ہے۔ لیکن اس کے لئے یہ ضروری ہے کہ آپ ریاضی کا علم کچھ اور سیکھیں تاکہ آپ ریاضیاتی موڈلنگ کی طاقت کو سراہ سکیں آئندہ کلاسوں میں آپ کو اس ذوق کی کچھ مثالیں ملیں گی۔

2.2 ریاضیاتی موڈلنگ کے مراحل

نویں کلاس میں ہم نے موڈلنگ کے استعمال کی کچھ مثالوں پر غور کیا تھا کیا انہوں نے آپ کو اسے عمل میں ملوث اقدام کے سلسلہ میں کوئی بصیرت عطا کی تھی؟ آئیے تیزی سے ہم ریاضیاتی موڈلنگ کے خاص اقدام پر نظر ثانی کرتے ہیں۔

قدم 1: (مسئلہ کو سمجھنا)، اصل مسئلہ کی تعریف بیان کیجئے اور اگر آپ ایک ٹیم کی شکل میں کام کر دیتے ہیں تو اس مسئلہ پر بحث کیجئے جو آپ سمجھنا چاہتے ہیں۔ مفروضات بنا کر اس کو مختصر بناتے اور کچھ چیزوں کو نظر انداز کیجئے تاکہ مسئلہ قابل حل ہو جائے۔ مثال کے طور پر ہمارا مسئلہ ہے کہ کسی جھیل میں موجود مچھلیوں کی تعداد کا اندازہ لگانا ہے۔ یہ ممکن ہی نہیں ہے کہ ہم ہر مچھلی کو پکڑ کر

گئیں۔ ہم نمونے کے طور پر کچھ مچھلیوں کو پکڑیں اور جھیل میں موجود مچھلیوں کی تعداد کا اندازہ لگائیں۔

قدم 2: ریاضیاتی بیان اور تشکیل: مسئلہ کے مختلف پہلوؤں کو ریاضیاتی زبان میں بیان کریں اور ریاضیاتی زبان میں بیان کرنے کے سلسلہ میں کچھ طریقوں میں ملوث اہم نقاط ہیں۔

- متغیروں کی تعریف بیان کرنا
- مساواتیں اور نامساواتیں لکھنا
- اعداد و شمار اکٹھا کرنا اور ان کو جدول میں منظم کرنا
- گراف بنانا
- احتمال معلوم کرنا

مثال کے طور پر، ایک نمونہ لینے کے بعد، جیسا کہ قدم 1 میں بیان کیا گیا ہے، ہم کس طرح پوری آبادی کا اندازہ لگائیں گے؟ ہمیں نمونے کے طور پر لی گئیں مچھلیوں کو نشان زد کرنا ہوگا۔ اور اس جھیل میں باقی مچھلیوں کے ساتھ خلط ملط کرنے کے لئے آزاد کرنا ہوگا۔ اس کے بعد دوبارہ جھیل سے ایک اور نمونہ لیجئے اور یہ دیکھئے کہ نئے نمونے، پچھلے نمونے میں نشان زد کی گئیں مچھلیاں شامل ہیں یا نہیں اور نسبت اور تناسب کو استعمال کر کے ہم کل آبادی کا اندازہ لگا سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر جھیل سے 20 مچھلیوں کا ایک نمونہ لیجئے اور ان کو مارک کر دیجیے اور پھر ان کو پانی میں دوبارہ چھوڑ دیجئے۔ تاکہ وہ باقی مچھلیوں کے ساتھ خلط ملط ہو جائے۔ پھر ہم ایک دوسرا نمونہ مان لیجئے (50 مچھلیوں) کا ملی جلی آبادی میں سے لیجئے اور دیکھئے اس میں کتنی مچھلیاں مارک والی ہیں۔ اس طرح سے ہم مارک کی گئی مچھلیوں کو یکساں طور پر مچھلیوں کے ساتھ پیش کرتے ہیں اور جو نمونے ہم لیتے ہیں وہ پوری آبادی کی صحیح نمائندگی کرتا ہے۔

قدم 3: (ریاضیاتی مسئلے کو حل کرنا): قدم 2 سے ملی ریاضیاتی مسئلہ کی مختصر شکل کو مختلف ریاضیاتی تکنیکوں کے استعمال سے حل کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر مان لیجئے مثال کے دوسرے نمونے میں 5 مچھلیوں کو نشان زد کیا گیا۔ اس طرح 5/50 یعنی آبادی کا $\frac{1}{10}$ مارک کیا گیا، اگر یہ پوری آبادی کا typical تب آبادی کا $\frac{1}{10}$ ہے = 20
اس لئے کل آبادی = $20 \times 10 = 200$ ہے۔

قدم 4: (حل کی ترجمانی): پچھلے قدم میں ملے حل کو اب اصل زندگی کی صورت حال کے پس منظر میں دیکھیے جو ہم نے قدم 1:

میں شروع کی تھی۔

مثال کے طور پر قدم 3 میں مسئلے کا حل مچھلیوں کی کل آبادی 200 دیتا ہے۔

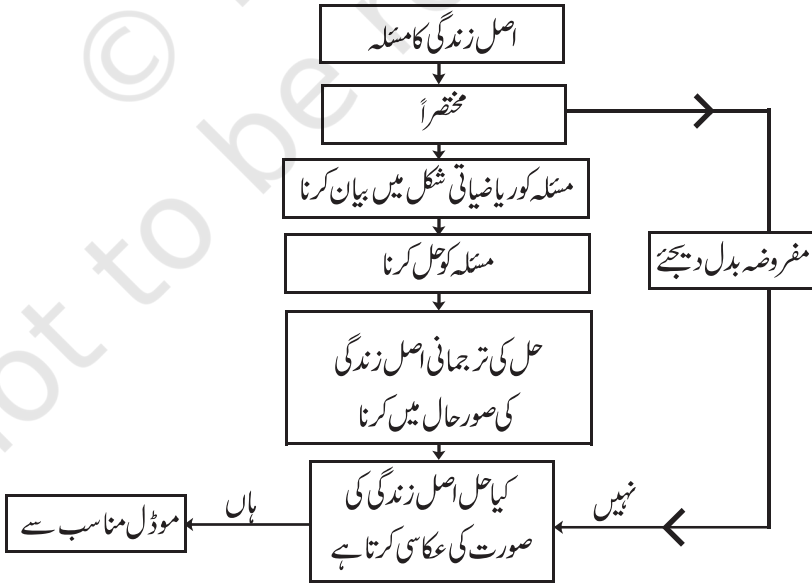
قدم 5: (Validating the model) کو سبق کنندہ موڈل

ہم اپنے اصل مسئلے کی طرف واپس جاتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ جو نتیجہ آیا اس کا کچھ احساس بھی ہے یا اگر ایسا ہے تو ہم اس موڈل کو جب تک استعمال کرتے ہیں جب تک کہ نئی اطلاعات فراہم نہ ہو جائیں یا مفروضات بدل جائیں۔

کبھی کبھی مفروضات کے اختصار کی وجہ سے ہم اصل مسئلہ کا ضروری پہلو نظر انداز کر دیتے ہیں جب ہم اس کا ریاضیاتی بیان دیتے ہیں ایسی حالت میں حل حقیقت سے بہت دور ہوتا ہے اور اصل میں اس کا کوئی مطلب نہیں ہوتا۔ اگر ایسا ہو تو ہم قدم 1 میں لئے گئے مفروضہ پر دوبارہ غور کرتے ہیں۔ اور حقیقت سے نزدیک بنانے کے لئے اس کو تبدیل کرتے ہیں خاص طور سے کچھ ایسی چیزوں (factor) کو ان میں شامل کر کے جو پہلے شامل نہیں تھے۔

مثال کے طور پر قدم 3 میں ہمیں مچھلیوں کی پوری آبادی کا اندازہ حاصل ہوا ہے ضروری نہیں کہ یہ جھیل میں موجود مچھلیوں کی اصل تعداد ہو۔ ہم قدم 2 اور 3 کو کئی مرتبہ دہرا کر دیکھتے ہیں کہ یہ مچھلیوں کا صحیح اندازہ ہے یا نہیں اور پھر نتائج کا درمیانہ لیتے ہیں۔ یہ آبادی کا نزدیک اندازہ ہوگا۔

ریاضیاتی موڈلنگ کے عمل کو دیکھنے کا ایک اور طریقہ شکل A2.1 میں دکھایا گیا ہے۔



موڈل بنانے والے اختصار (حل کی اضافی کے لئے) اور درستگی کے درمیان توازن پر نظر رکھتے ہیں کیونکہ بہتر نتیجہ سے آپ پیشن گوئی کر سکتے ہیں کہ کیا ہوگا۔

یاد کیجئے کہ مسئلہ کو مختصر بنانے کے لئے ہم مختلف مفروضہ استعمال کرتے ہیں۔ جن سے ہمیں مختلف موڈل ملتے ہیں اس لئے کوئی بھی موڈل مکمل نہیں ہوتا۔ اچھے موڈل بھی ہوتے ہیں لیکن ان سے بہتر بھی بنائے جاسکتے ہیں۔

مشق A2.1

1. مندرجہ ذیل صورت حال پر غور کیجئے

یہ مسئلہ 13 ویں صدی کے اوائل کا ہے جو Leonard Fibonacci نے اٹھایا تھا۔ اس نے پوچھا تھا کہ آپ کے پاس کل کتنے خرگوش ہوں گے اگر شروع میں آپ کے پاس صرف دو خرگوش ہوں اور تولید کے لئے ان کو چھوڑ دیں۔ فرض کیجئے خرگوشوں کا ایک جوڑا ہر مہینہ خرگوشوں کا ایک جوڑا پیدا کرتا ہے اور پیدا ہونے خرگوش 2 مہینہ کی عمر میں اپنا پہلا بچہ پیدا کرتے ہیں۔ مہینہ در مہینہ خرگوشوں کے جوڑوں کی تعداد صفر اور پہلے مہینے کو چھوڑ کر پچھلے دو مہینے میں خرگوشوں کا حاصل جمع ہوتا ہے:

مہینہ	خرگوشوں کے جوڑے
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

16 مہینوں کے بعد ایک کے پاس تقریباً 1600 خرگوش ہوں گے۔
اس صورت حال کے ریاضیاتی موڈلنگ سے مختلف مراحل کو واضح طور پر بیان کیجیے۔

A2.3 کچھ وضاحتیں

آئیے اب ریاضیاتی موڈلنگ کی کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 1: (پانسوں کے ایک جوڑے کو پھینکنا): فرض کیجئے آپ کی ٹیچر آپ کو اندازے سے ایک کھیل کھلاتی ہیں۔ وہ پانسوں کا ایک جوڑا پھینکتی ہے۔ اس سے پہلے آپ کو ان پانسوں کے اوپر کے رخ پر آنے والے اعداد کے حاصل جمع کا اندازہ کرتا ہے ہر صحیح اندازے پر آپ کو دو پوائنٹس دئے جائیں گے۔ اور غلط اندازے پر آپ کو دو پوائنٹس کھونے پڑیں گے۔ کون سے اعداد کا اندازہ سب سے بہتر ہوگا۔

حل:

قدم 1: (مسئلے کو سمجھنا): آپ کو کچھ ایسے اعداد کا علم ہونا چاہئے جن کے آنے کے امکان زیادہ ہوں۔

قدم 2: (ریاضیاتی بیان): ریاضیاتی زبان میں مسئلے کا مطلب ہے پانسوں کے ذریعے دکھائے جانے والے اعداد کے ممکنہ حاصل جمع کا احتمال معلوم کریں۔

ہم صورت حال کو آسانی سے، پانسوں کے پھیلے جانے کو مندرجہ ذیل اعداد، کے 36 جوڑوں میں ایک کے بلا منصوبہ انتخاب کے طور پر، موڈل کر سکتے ہیں۔

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

ہر ایک جوڑے میں پہلا عدد پہلے پانسہ پر آنے والے عدد کو اور دوسرا عدد دوسرے پانسہ پر آنے والے عدد کو ظاہر کرتا ہے۔

قدم 3: (ریاضیاتی مسئلے کو حل کرنا): اوپر دئے گئے ہر ایک جوڑے کا حاصل جمع معلوم کرنے پر ہم ممکنہ حاصل جمع پاتے ہیں 3, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 اور 12 حاصل ہوتے ہیں ہمیں 36 جوڑوں کو مساوی امکانی مان کر ہر ایک کا احتمال معلوم کرنا ہے۔

ایسا ہم مندرجہ ذیل جدول میں کرتے ہیں۔

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	حاصل جمع
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	احتمال

مشاہدہ کیجئے کہ حاصل جمع 7 کے آنے کا امکان $\frac{1}{6}$ ہے، جو باقی کسی اور عدد کے حاصل جمع کے طور پر آنے کا امکان بڑا ہے۔

قدم 4: (حل کی ترجمانی): کیونکہ حاصل جمع 7 آنے کا احتمال سب سے زیادہ ہے اس لئے آپ بار بار عدد 7 کا اندازہ کیجئے۔

قدم 5: (توسیع کنندہ موڈل): پانسوں کے ایک جوڑے کو کثیر تعداد میں پھینکیے۔ اور اس کا متعلقہ تعداد جدول بنائیے۔ متعلقہ

تعداد کا ان کے نظری احتمالوں سے موازنہ کیجئے۔ اگر یہ قریب قریب نہیں ہے تب ممکنہ طور پر پانسے جانب دار ہیں۔ تب ہم اس عدد کی جس کی طرف پانسے جانب دار ہیں، قدر معلوم کرنے کے لئے اعداد و شمار حاصل کرتے ہیں اگلی مثال کو حل کرنے سے پہلے آپ کو کچھ پس منظر معلوم ہونا ضروری ہے۔

بہت سے لوگوں کا یہ مشترک تجربہ ہے کہ جب آپ کو کچھ پیسوں کی ضرورت ہوتی ہے جبکہ ان کے پاس ضروری کام کے لئے مناسب پیسے نہیں ہوتے۔ وہ روزمرہ کے استعمال کی ضروری اشیا کو خریدنا ہو یا ایسے آرام کے لئے چیزوں کو خریدنے کے لئے پیسوں کی ضرورت ہوتی ہے۔ گا ہوں کو اس قابل بنانے کے لئے تو وہ محدود فنڈ میں اشیا جیسے اسکوٹر، فرج، T.V.، کاریں وغیرہ خرید سکیں۔ تاجر اکثر قسطوں میں ادائیگی سے متعارف کراتے ہیں۔

کبھی کبھی تاجر قسطوں کی اسکیم اس لئے نکالتے ہیں کہ یہ ان کی گا ہوں کو کچھ اشیا خریدنے پر رجحان کی حکمت عملی ہوتی ہے۔ قسطوں کی اسکیم میں گا ہک کو اشیا خریدتے وقت پوری رقم ادا کرنا ضروری نہیں ہوتا۔ وہ کچھ حصہ کو اشیا کو خریدتے وقت ادا کرتے ہیں اور باقی رقم قسطوں میں ادا کرتے ہیں جو ماہانہ، سہ ماہی، ششماہی یا سالانہ ہوتی ہیں۔ بے شک خریدنے والے کو قسطوں کی اسکیم میں کچھ رقم زیادہ دینی پڑتی ہے کیونکہ تاجر ان سے پوری رقم بعد کی تاریخ میں لینے کے لئے کچھ سود لیتا ہے۔

اس سے پہلے کہ ہم قسطوں کی اسکیم کو سمجھنے کے لئے کچھ مثالوں پر غور کریں آئیے اس تصور سے متعلق استعمال ہونے والی کچھ اصطلاحات کو سمجھ لیں۔

نقد قیمت: کسی شے کی نقد قیمت ہے جو ایک گاہک کو چیز کی پوری قیمت کے طور پر ادا کرنا ضروری ہوتی ہے۔ (C. D. P.)
Cash Down Payment وہ رقم ہے جو گاہک کو کل قیمت کے ایک جز کے طور پر چیز خریدتے وقت پر ادا کرنی ہوتی ہے۔

ریمارک: اگر قسطوں کی اسکیم ایسی ہے کہ بقیہ ادائیگی چیز خریدنے کے بعد ایک سال کے اندر کی جائے تو تاخیر ادائیگی پر سود مقرر دیا جاتا ہے۔

ماضی میں ادھار میں لی گئی چیزوں پر سود لینا اکثر برا سمجھا جاتا ہے اور خاص طور لمبے عرصہ تک منع تھا۔ سود کے خلاف قانون سے بچنے کے لئے لوگوں نے ایک طریقہ نکالا تھا چیز کو ایک کرنسی ادھار لیتے تھے اور دوسری کرنسی میں واپس کرتے، اس طرح سے سود کی شکل بدل دی جاتی تھی۔

آئیے اب اس سے متعلق ریاضیاتی موڈلنگ مسئلے کی طرف واپس آتے ہیں۔

مثال 2: جوہی ایک سائیکل خریدنا چاہتی ہے وہ مارکیٹ جاتی ہے اور یہ پاتی ہے کہ جو سائیکل وہ خریدنا چاہتی ہے اس کی قیمت 1800 روپے ہے۔ جوہی کے پاس 600 روپے ہیں۔ وہ دکاندار کو یہ بتاتی ہے کہ وہ اس کو نہیں خرید سکتی۔ دکاندار کو کچھ تحسب کرنے کے بعد اسے ایک پیش کش کرتا ہے وہ جوہی سے کہتا ہے کہ وہ 600 روپے C.D.P. کے طور پر دے کر سائیکل لے سکتی ہے اور باقی رقم 610 روپیہ کی دو ماہانہ قسطوں میں ادا کر سکتی ہے جوہی کے پاس Option میں ایک تو یہ کہ دو قسطوں کی ایک اسکیم پر سائیکل خریدے اور دوسری یہ کہ وہ ایک بینک سے 10% سالانہ کی شرح سے سود مقرر دے کر سائیکل کو نقد خریدے۔ بتائیے کس طریقے سے اس کو معاشی طور پر فائدہ ہوگا۔

حل: (مسئلہ کو سمجھنا) جوہی کو یہ فیصلہ کرنا ہے کہ وہ دکاندار کی پیش کش کو قبول کرے یا اس کے لئے اس کو سود کی دو شرحوں پر غور کرنا ہے۔ ایک وہ سود جو قسطوں کی ایک اسکیم میں اس کو دینا ہے دوسری وہ جو بینک (یعنی 10%) اسے دینا ہے۔

قدم 2: (ریاضیاتی) اسکیم کو قبول کرنے یا رد کرنے کے سلسلہ میں اس کو دکاندار کے ذریعے ادا کئے گئے سود کو موازنہ بینک کے

ذریعے لئے گئے سود سے کرنا ہے۔ مشاہدہ کیجیے کہ پوری رقم ایک سال کے اندر ادا کرنی ہے تو سود مفرد ہی دینا ہوگا۔

ہم جانتے ہیں کہ سائیکل کی نقد قیمت ہے = 1800 روپے

قسطوں کی اسکیم کے تحت CDP = 600 روپے

اس لئے بقیہ رقم جو قسطوں میں ادا کرنی وہ (1800 - 600) = 1200

مان لیجئے دکاندار r% سالانہ کی شرح سے سود لیتا ہے

ہر قسط کی رقم = 610

قسطوں کے ذریعے ادا کی گئی رقم 610 + 610 = 1220

(1) قسطوں کی اسکیم میں دیا جانے والا سود 1220 - 1200 = 20

کیونکہ جوہی نے 1200 روپے کی رقم ایک مہینہ تک اپنے پاس رکھی اس لئے

مہینہ کی اصل زر = 1200 روپے

دوسرے مہینہ کا اصل زر (1200 - 610) = 590

دوسری قسط = ماہانہ قسط (610) = لیا گیا سود (20) + دوسری اصل زر کی رقم

اس لئے ایک مہینہ کا کل اصل زر 1200 + 590 = 1790 روپے

(2) اب
$$\text{سود} = \frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12}$$

قدم 3: (مسئلے کو حل کرنے پر) (1) اور (2) سے

$$\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} = 20$$

$$r = \frac{20 \times 1200}{1790} = 13.14 \text{ (تقریباً)}$$

قدم 4: (حل کی ترجمانی): قسطوں کی اسکیم میں لئے جانے والے سود کی شرح سے 13.14% بینک کے ذریعے لئے جانے

والے سود کی شرح = 10%

اس لئے وہ بینک سے رقم لینے کو ترجیح دے گی جو کہ اس کے لئے فائدہ مند ہے

قدم 5: (توسیق کنندہ موڈل) اس مثال میں یہ مرحلہ زیادہ اہمیت کا حامل نہیں ہے کیونکہ یہاں اعداد متعین ہیں۔ لیکن اگر بینک سے رقم ادھار لیتے ہیں۔ بہت سی چیزیں جیسے اسٹیمپ پیپر کی کاسٹ وغیرہ جس کی وجہ سے سود کی شرح بڑھ جاتی ہو تو وہ ایسا نظریہ بدل بھی سکتی ہے۔

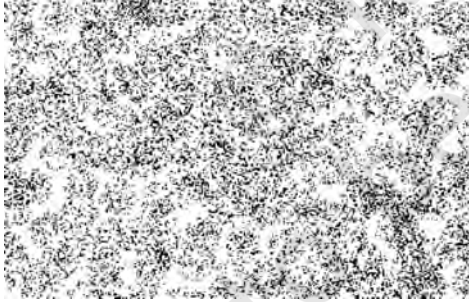
ریمارک: سود کی شرح کی موڈلنگ ابھی تک ابتدائی مرحلہ میں ہے اور توسیق مالیاتی مارکیٹ کے لئے ابھی بھی مسئلہ ہے۔ اگر قسطوں کو فکس کرنے کے لئے مختلف سود کی شرح لاگو ہوں تو سوسیق پھر ایک اہم مسئلہ بن جاتا ہے۔

مشق 2.2 A

مندرجہ ذیل پر ایک مسئلہ کو حل کرنے کے لئے ریاضیاتی موڈلنگ کی مختلف مراحل کو دکھائیے۔

1. ایک ماہر علم الطیور ایک بڑے میدان میں طوطوں کی تعداد کا اندازہ لگانا چاہتا ہے۔ وہ ان میں سے کچھ کو پکڑنے کے لئے ایک جال کا استعمال کرتا ہے اور 32 طوطے پکڑ لیتا ہے جن پر وہ نشان لگا کر چھوڑ دیتا ہے۔ اس کے اگلے ہفتے میں وہ اسی طرح سے جال میں 40 طوطے پکڑتا ہے جس میں 8 طوطوں پر نشان لگا ہوتا ہے

(i) دوسری مرتبہ پکڑے گئے طوطوں پر نشان لگے طوطوں کی کسریا ہے؟



(ii) میدان میں موجود کل طوطوں کی تعداد کا اندازہ لگائیے۔

2. متصل شکل ایک جنگل کی اونچائی سے لیا گیا ایک فوٹو گراف ہے جس میں ہر ڈاٹ ایک درخت کو ظاہر کرتا ہے۔ ماحولیاتی سرشمار کی وجہ سے آپ کا مقصد اس جنگل میں درختوں کی تعداد معلوم کرنا ہے۔

3. ایک T. V کو 24000 روپے نقد یا 800 روپے C.D.P کے طور پر خرید جا سکتا ہے۔ باقی کی رقم 2800 روپے ماہانہ کی چھ قسطوں میں ادا کی جاتی ہے۔ علی مارکیٹ T. V خریدنے جاتا ہے اور اس کے پاس 800 روپے بھی ہیں۔ اب اس کے پاس کوئی بھی طریقہ اختیار کرنے کا حق ہے۔ ایک تو یہ کہ وہ قسطوں کی اسکیم کے تحت T.V خریدے یا کسی مالیات سوسائٹی سے قرض لے کر نقد T.V خریدے۔ سوسائٹی 18% سالانہ کی شرح سے سود منفر د لیتی ہے۔ علی کے لئے کون سا طریقہ اختیار کرنا بہتر ہے۔

A2.4 ریاضیاتی موڈلنگ اتنی اہم کیوں ہے؟

جیسا کہ ہم مثالوں میں دے چکے ہیں۔ ریاضیاتی موڈلنگ Interdisciplinary مضمون ہے ریاضی داں اور دوسرے میدانوں کے ماہرین اپنے علم اور مہارت کو موجودہ پروڈکٹ کو بہتر بنانے اور دوسرے نئے بہترین پروڈکٹ بنانے یا کچھ مخصوص پروڈکٹ کی کوالٹی کی پیشن گوئی کرنے میں، تعاون کرتے ہیں۔

بے شک ریاضیاتی موڈلنگ کی اہمیت کچھ مخصوص وجوہات ہیں لیکن ان میں زیادہ تر مندرجہ ذیل سے متعلق ہیں۔

- سمجھ حاصل کرنا: اگر ہمارے پاس ایک ایسا موڈل ہے جو اصل دنیاوی دلچسپی کے نظام کے ضروری طور طریقوں کی عکاسی کرتا ہے۔ ہم اس نظام کو موڈل کے تجزیہ کے ذریعہ بہتر طور پر سمجھ سکتے ہیں۔ مزید موڈل کی تشکیل کے عمل میں ہم ان چیزوں (factors) کو معلوم کرتے ہیں جن کی نظام میں بہت اہمیت ہوتی، اور نظام کے مختلف پہلو کس طرح سے ایک دوسرے سے متعلق ہیں۔

- پیشمن گوئی کرنا یا بہرہ روپ بھرنا (Simulate): اکثر ہماری یہ جاننے کی خواہش ہوتی ہے کہ اصل دنیاوی نظام مستقبل میں کیا کرے گا۔ لیکن نظام کے ساتھ براہ راست تجزیہ کرنا کافی مہنگا اور ناممکن ہے مثال کے طور پر موسم کی پیشمن گوئی، میں انسانوں میں ادویات کے اثر کا مطالعہ کرنے میں اور ایک نیوکلیئر ری ایکٹر کا مناسب ڈیزائن معلوم کرنا وغیرہ۔ مختلف قسم کی تنظیموں میں پیشمن گوئی کی کافی اہمیت ہے کیونکہ مستقبل میں ہونے والے واقعات کی پیشمن گوئی فیصلہ لینے کے عمل میں کافی کارآمد ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر مارکیٹ کے شعبوں میں مانگ کی صحیح پیشمن گوئی سیل کی صحیح حکمت عملیاں بنانے میں مددگار ثابت ہوتی ہے۔

اسکول بورڈ کو کسی ڈسٹرکٹ میں اسکول جانے والے بچوں کی تعداد میں اضافہ کی پیشن گوئی کرنے کی ضرورت ہوتی ہے تاکہ یہ طے کیا جاسکے کہ کب اور کہاں نئے اسکول کھولے جاتے ہیں۔

زیادہ تر پیشمن گوئی کرنے والے مستقل کے بارے میں پیشن گوئی کرنے کے لئے پرانے اعداد و شمار کا استعمال کرتے ہیں پہلے وہ اعداد و شمار کا تجزیہ کرتے ہیں تاکہ ان کو بیان کرنے والے پیٹرن (نمونہ) کی شناخت کی جاسکے۔ اور پھر ان اعداد و شمار اور پیٹرن کی توسیع مستقبل میں پیشمن گوئی کرنے کے لئے کرتے ہیں۔ زیادہ تر پیشمن گوئی کی تکنیک میں یہی بنیادی حکمت عملی استعمال ہوتی ہے۔ اور اس کی بنیاد اس مفروضہ پر ہوتی ہے کہ پیٹرن جس کی شناخت کی جا چکی ہے، مستقبل کے لئے بھی کارگر ہوگا۔

- اندازہ لگانا : اکثر ہمیں بڑی قدروں کا اندازہ لگانا ہوتا ہے۔ آپ جنگل میں درختوں، جھیل میں مچھلیوں کی تعداد کی مثالیں دیکھ چکے ہیں۔ چناؤ سے پہلے زیادہ تر سیاسی پارٹیاں اپنے الیکشن جیتنے کے احتمال کی پیشن گوئی کرنا چاہتی ہیں۔ خاص طور پر وہ یہ جاننا چاہتی ہیں ان کے حلقہ کے کتنے لوگ ان کی پارٹی کو ووٹ دیں گے۔ اس پیشن گوئی کی بنیاد پر اپنے انتخابی مہم کی حکمت عملی تیار کرتی ہیں۔ آج کل رائے شماری کے بعد اندازہ کرنے کا کثرت سے استعمال یہ پیشن گوئی کرنے کے لئے ہوتا ہے کہ کون سی پارٹی سیٹ جیتے گی۔

مشق A2.3

1. پچھلے 5 سالوں کی اعداد و شمار کی بنیاد پر پیشن گوئی کی کوشش کیجیے کہ سال کے آخر میں آپ کے اسکول میں دسویں کلاس کے بورڈ کے امتحان میں ریاضی میں آنے والے نمبروں کی اوسط فی صد کیا ہوگی۔

A2.5 خلاصہ

اس ضمیمہ میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں۔

1. ریاضیاتی موڈل اصل زندگی کی صورت حال کا ریاضیاتی بیان (شکل) ہے۔ ریاضیاتی موڈلنگ کا کام ریاضیاتی موڈل بنانے کا عمل ہے۔ اس کو حل کرنا اور اس کا استعمال کر کے اصل زندگی کا مسئلہ کو سمجھنا۔
2. موڈلنگ میں ملوث بہت سے اقدام ہیں: مسئلہ کو سمجھنا، ریاضیاتی موڈل کی تشکیل، اس کو حل کرنا اصل زندگی کی صورت حال میں اس کی ترجمانی کرنا اور خصوصاً تو سبق کنندہ موڈل۔
3. کچھ ریاضیاتی موڈل کی تخلیق۔
4. ریاضیاتی موڈلنگ کی اہمیت۔

جوابات / اشارے

مشق 1.1

1. (i) 45 (ii) 196 (iii) 51
- 2- ایک صحیح عدد $6q + 4$ یا $6q + 3$ ، $6q + 2$ ، $6q + 1$ ، $6q$ یا $6q + 4$ کی شکل کا ہو سکتا ہے۔
- 3- 8 کالم
- 4- ایک صحیح عدد $3q$ ، $3q + 1$ یا $3q + 2$ کی شکل کا ہو سکتا ہے۔ ان تمام اعداد کے مربع۔
- 5- ایک صحیح عدد $9q + 1$ ، $9q + 2$ ، $9q + 3$ ، $9q + 4$ ، $9q + 5$ ، $9q + 6$ ، $9q + 7$ یا $9q + 8$ کی شکل کا ہو سکتا ہے۔

مشق 1.2

1. (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$
(iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$
2. (i) LCM = 182; HCF = 13 (ii) LCM = 23460; HCF = 2 (iii) LCM = 3024; HCF = 6
3. (i) LCM = 420; HCF = 3 (ii) LCM = 1139; HCF = 1 (iii) LCM = 1800; HCF = 1
- 4- (i) 22338 (ii) 36 منٹ

مشق 1.4

(ii) مختتم

(i) -1 مختتم

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| (iv) مختتم | (iii) غیر مختتم تکراری |
| (vi) مختتم | (v) غیر مختتم تکراری |
| (viii) غیر مختتم تکراری | (vii) مختتم |
| (x) غیر مختتم تکراری | (ix) تکراری |
2. (i) 0.00416 (ii) 2.125 (iv) 0.009375
 (vi) 0.115 (viii) 0.4 (ix) 0.7

3- (i) ناطق q کے مفرد اجزائے ضربی یا تو 2 یا 5 یا دونوں

(ii) ناطق نہیں ہیں

(iii) ناطق q کے مفرد اجزائے ضربی میں 2 یا 5 کے علاوہ بھی جزو ضربی ہوگا۔

مشق 2.1

- 1- (i) کوئی صفر نہیں (ii) 1 (iii) 3 (iv) 2 (v) 4 (vi) 3

مشق 2.2

1. (i) -2, 4 (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$
 (iv) -2, 0 (v) $-\sqrt{15}, \sqrt{15}$ (vi) $-1, \frac{4}{3}$
2. (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$ (iii) $x^2 + \sqrt{5}$
 (iv) $x^2 - x + 1$ (v) $4x^2 + x + 1$ (vi) $x^2 - 4x + 1$

مشق 2.3

- 1- (i) خارج قسمت $x - 3 = 7x - 9$ اور باقی $x - 3 = 8$
 (ii) خارج قسمت $x^2 + x - 3 = 8$ اور باقی $x^2 + x - 3 = 8$
 (iii) خارج قسمت $x^2 - 2 = -5x + 10$ اور باقی $x^2 - 2 = -5x + 10$

$$g(x) = x^2 - x + 1 \quad -4 \quad -1, 1, 3 \quad \text{(iii) نہیں} \quad \text{(ii) ہاں} \quad \text{(i) ہاں} \quad -2$$

$$5. \text{ (i) } p(x) = 2x^2 - 2x + 14, \quad q(x) = x^2 - x + 7, \quad g(x) = 2, \quad q(x) = x, \quad r(x) = 0$$

$$\text{(ii) } p(x) = x^3 + x^2 + x + 1, \quad g(x) = x^2 - 1, \quad q(x) = x + 1, \quad r(x) = 2x + 2$$

$$\text{(iii) } p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2, \quad g(x) = x^2 - 1, \quad q(x) = x + 2, \quad r(x) = 4$$

(i)، (ii) اور (iii) میں ہر ایک کی بہت سی مثالیں ہیں۔

مشق 2.4 اختیاری

$$2. \quad x^3 - 2x^2 - 7x + 14$$

$$3. \quad a = 1, b = \pm \sqrt{2}$$

$$4. \quad -5, 7$$

$$5. \quad a = -5 \text{ اور } k = 5$$

مشق 3.1

1- الجبری طور پر دو صورت حال کو ہم ذیل میں دکھاتے ہیں:

جہاں x اور y بالترتیب آفتاب اور اس کی لڑکی کی موجودہ عمر میں سے صورت حال کو گرانی طور پر ظاہر کرنے کے لئے آپ ان دو خطی مساواتوں کا گراف بنائیے۔

2- الجبری طور پر دونوں صورت حال کو ہم مندرجہ ذیل میں دکھاتے ہیں۔ $x + 3y = 1300$; $x + 2y = 1300$ جہاں x اور y بالترتیب سیبوں اور انگوروں کی قیمت (روپوں میں) ہیں۔ صورت حال کو گراف کی مدد سے دکھانے کے لئے آپ دو خطی مساواتوں کا گراف بنا سکتے ہیں۔

3- الجبری طور پر دونوں صورت حال کو ہم مندرجہ ذیل میں دکھاتے ہیں:

جہاں x اور y بالترتیب سیبوں اور انگوروں کی قیمت (روپوں میں) ہیں۔ صورت حال کو گرانی طور پر ظاہر کرنے کے لئے ان دو خطی مساواتوں کا آپ گراف بنا سکتے ہیں۔

مشق 3.2

1- (i) مطلوبہ خطی مساواتوں کا جوڑا ہے

جہاں x اور y لڑکیوں کی تعداد اور لڑکوں کی گراف سے حل کرنے کے لئے ان مساواتوں کا

گراف ایک ہی گراف پیپر پر بنائیے۔

لڑکیاں = 7، لڑکے = 3

(ii) مطلوبہ خطی مساواتوں کا جوڑا ہے

5x + 7y = 50; 7x + 5y = 46 جہاں x اور y بالترتیب پین اور پنسلوں کی قیمت (روپوں میں) ظاہر کرتے ہیں۔

گراف کی مدد سے حل کرنے کے لئے ایک ہی محوروں پر ان مساواتوں کا گراف بنائیے۔

پنسل کی قیمت = 3 روپیہ، پین کی قیمت = 5 روپیہ

-2 (i) ایک ہی نقطہ پر قطع کریں گے (ii) منطبق (iii) متوازی

-3 (i) ہم آہنگ (ii) غیر ہم آہنگ (iii) ہم آہنگ

(iv) ہم آہنگ (v) ہم آہنگ

-4 (i) ہم آہنگ (ii) غیر ہم آہنگ (iii) ہم آہنگ (iv) غیر ہم آہنگ

اوپر (i) کا حل ہے $y = 5 - x$ جہاں x کوئی بھی قدر لے سکتا ہے یعنی لامحدود حل ہوں گے۔

اوپر (iii) کا حل ہے $x = 2, y = 2$ یعنی یکتا حل

-5 لمبائی = 20 میٹر اور چوڑائی = 16

-6 تین حصوں کے لئے ایک ممکنہ جواب

(i) $3x + 2y - 7 = 0$ (ii) $2x + 3y - 12 = 0$ (iii) $4x + 6y - 16 = 0$

-7 مثلث کے راس ہیں $(-1, 0)$, $(4, 0)$ اور $(2, 3)$

مشق 3.3

1. (i) $x = 9, y = 5$ (ii) $s = 9, t = 6$ (iii) $y = 3x - 3$,

کی کوئی بھی قدر ہو سکتی ہے۔ یعنی لامحدود حل x جہاں

(iv) $x = 2, y = 3$ (v) $x = 0, y = 0$ (vi) $x = 2, y = 3$

2. $x = -2, y = 5, m = -1$

$$x = 39, y = 13; (x > y) \text{ جہاں } x \text{ اور } y \text{ دو اعداد ہیں } x = 3y, x - y = 26 \text{ (i) } -3$$

$$y = 81, x = 99 \text{ ہے ڈگری پیمائش کی } x + y = 180, x - y = 18 \text{ (ii)}$$

$$7x + 6y = 3800, 3x + 5y = 1750 \text{ (iii) جہاں } x \text{ اور } y \text{ بالترتیب ایک بیٹ اور ایک گیند کی (روپوں میں)}$$

$$\text{قیمتیں ہیں } y = 50, x = 500$$

$$x + 15y = 155, x + 10y = 105 \text{ (iv) جہاں } x \text{ روپیہ میں متعین چارج اور } y \text{ (روپے فی کلومیٹر) میں کرایہ } x = 5$$

$$y = 10, 255 \text{ روپے۔}$$

$$6x - 5y + 3 = 0, 11x - 9y + 4 = 0 \text{ (vi) جہاں } x \text{ اور } y \text{ کسر } (x = 7, y = 9) \text{ کے شمار کنندہ اور نسب نما ہیں۔}$$

$$x - 7y + 30 = 0, x - 3y - 10 = 0 \text{ (vi) جہاں } x \text{ اور } y \text{ جیکب اور اس کے بیٹے ہیں۔ } x = 40, y = 10$$

مشق 3.4

$$1. \text{ (i) } x = \frac{19}{5}, y = \frac{6}{5}$$

$$\text{(ii) } x = 2, y = 1$$

$$\text{(iii) } x = \frac{9}{13}, y = -\frac{5}{13}$$

$$\text{(iv) } x = 2, y = -3$$

$$2x - y - 1 = 0, x - y + 2 = 0 \text{ (i) } -2 \text{ جہاں } x \text{ اور } y \text{ کسر } \frac{3}{5} \text{ کے شمار کنندہ اور نسب نما ہیں۔}$$

$$x - 2y - 10 = 0, x - 3y + 10 = 0 \text{ (ii) جہاں } x \text{ اور } y \text{ بالترتیب نوری اور سونو کی عمریں ہیں، نوری کی عمر (x)}$$

$$\text{ہے } 50 \text{ اور سونو کی عمر (y) } = 20$$

$$8x - y = 0, x + y = 9 \text{ (iii) جہاں } x \text{ اور } y \text{ بالترتیب عدد } 18 \text{ کے دہائی اور اکائی کے ہندسہ ہیں۔}$$

$$x + y = 25, x + 2y = 40 \text{ (iv) جہاں } x \text{ اور } y \text{ بالترتیب } 50 \text{ روپے اور } 100 \text{ روپوں کے نوٹوں کی تعداد ہے}$$

$$y = 15, x = 10$$

$$x + 2y = 21, x + 4y = 27 \text{ (v) جہاں } x \text{ متعین کرایہ روپوں میں اور } y \text{ اضافی کرایہ فی دن (روپوں میں)}$$

$$y = 3, x = 15$$

مشق 3.5

$$\text{(ii) کیتا حل } x = 2, y = 1$$

$$-1 \text{ (i) کوئی حل نہیں}$$

$$(iii) \text{ لامحدود حل } \quad (iv) \text{ یکتا حل } y = 1, x = 4$$

$$2. (i) , a = 5 \quad b = 1 \quad (ii) k = 2 \quad .3 \quad y = 5, x = -2$$

4- (i) $x + 20y = 1000$ ، $x + 26y = 1180$ جہاں x متعین چارج (روپیوں میں) اور y فی دن کھانے کا چارج (روپیوں میں) $x = 400$ ، $y = 30$

$$(ii) 3x - y - 3 = 0 \quad 4x - y - 8 = 0 \text{ جہاں } x \text{ اور } y \text{ کسر } \frac{5}{12} \text{ کے شمار کنندہ اور نسب نما ہیں۔}$$

$$(iii) 3x - y = 40 \quad 2x - y = 25 \text{ جہاں } x \text{ اور } y \text{ بالترتیب صحیح اور غلط جوابات کی تعداد ہے؛ } 20$$

$$(iv) u + v = 100, u - v = 20 \text{ جہاں } u \text{ اور } v \text{ (کلومیٹر فی گھنٹہ میں) دونوں کاروں کی رفتار میں بھی } u = 60, v = 40$$

(v) $3x - 5y - 6 = 0$ ، $2x + 3y - 61 = 0$ جہاں x اور y بالترتیب مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی میں لمبائی لمبائی = 17، چوڑائی = 9

مشق 3.6

$$1. (i) x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3} \quad (ii) x = 4, y = 9 \quad (iii) x = \frac{1}{5}, y = -2$$

$$(iv) x = 4, y = 5 \quad (v) x = 1, y = 1 \quad (vi) x = 1, y = 2$$

$$(vii) x = 3, y = 2 \quad (viii) x = 1, y = 1$$

2- (i) $u + v = 10, u - v = 2$ جہاں u اور v بالترتیب بجلی اور پانی کی (کلومیٹر فی گھنٹہ) میں رفتاریں ہیں۔

(ii) $\frac{2}{n} + \frac{5}{m} = \frac{1}{4}, \frac{3}{n} + \frac{6}{m} = \frac{1}{3}$ جہاں u اور v بالترتیب ٹرین اور ریس کی رفتار (کلومیٹر میں) ہیں۔

(iii) $\frac{60}{u} + \frac{240}{v} = 4, \frac{100}{u} + \frac{200}{v} = \frac{25}{6}$ جہاں u اور v بالترتیب ٹرین اور بس کی رفتار (کلومیٹر میں) ہیں

مشق 3.7 اختیاری

1- اہل کی عمر 19 سال اور بیجو کی عمر 16 سال یا اہل کی عمر 21 سال اور بیجو کی عمر 24 سال

2- 40 روپے اور 170 روپے، مان لیجیے x پہلے شخص کے پاس رقم (روپوں میں) اور دوسرے شخص کے پاس y (روپوں میں)

$$x + 100 = 2(y - 100), y + 10 = 6(x - 10)$$

3. 600 کلومیٹر
4. 36
5. $\angle A = 20^\circ, \angle B = 40^\circ, \angle C = 120^\circ$
6. مثلث کے راسوں کے مختصات ہیں $(1, 0), (0, -3), (0, -5)$
7. (i) $x = 1, y = -1$ (ii) $x = \frac{c(a-b)-b}{a^2-b^2}, y = \frac{c(a-b)+a}{a^2-b^2}$
- (iii) $x = a, y = b$ (iv) $x = a + b, y = -\frac{2ab}{a+b}$ (v) $x = 2, y = 1$
8. $\angle A = 120^\circ, \angle B = 70^\circ, \angle C = 60^\circ, \angle D = 110^\circ$

مشق 4.1

- (i) ہاں (ii) ہاں (iii) نہیں (iv) ہاں
(v) ہاں (vi) نہیں (vii) نہیں (viii) ہاں

2- (i) $2x^2 + x - 528 = 0$ جہاں x ، پلاٹ کی چوڑائی (میٹروں میں ہے)

(ii) $x^2 + x - 306 = 0$ جہاں x ایک چھوٹا صحیح عدد ہے

(iii) $x^2 + 32x - 273 = 0$ جہاں x (سالوں میں) روہن کی موجودہ عمر ہے

(vi) $u^2 - 8u - 1280 = 0$ جہاں u (کلومیٹر فی گھنٹہ) میں ٹرین کی رفتار ہے۔

مشق 4.2

1. (i) $-2, 5$ (ii) $-2, \frac{3}{2}$ (iii) $-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$
- (iv) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (v) $\frac{1}{10}, \frac{1}{10}$
2. (i) 9, 36 (ii) 25, 30

4- مثبت صحیح اعداد B اور 14 ہیں

3- اعداد 13 اور 14 ہیں

6- ایشیا کی تعداد = 6، ہر شے کی قیمت = 15 روپے

5- 5 سینٹی میٹر اور 12 سینٹی میٹر

مشق 4.3

1. (i) $\frac{1}{2}, 3$ (ii) $\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$ (iii) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(iv) موجود نہیں

2- وہی جو ایک میں ہے۔ -3 (i) $\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$, (ii) $\frac{3 - \sqrt{13}}{2}$ 4- 7 سال

5- ریاضی میں نمبر = 12، انگلش میں نمبر = 18 یا ریاضی میں نمبر = 13، انگلش میں نمبر = 17

6. میٹر، 120 میٹر

7. 12, 18

8. 40 کلومیٹر فی گھنٹہ

9. 25 گھنٹہ، 15

10- سواری گاڑی کی رفتار = 33 کلومیٹر فی گھنٹہ، ایکسپریس ٹرین کی رفتار 44 کلومیٹر فی گھنٹہ

11. 12 میٹر، 18 میٹر

مشق 4.4

1- (i) حقیقی جز نہیں ہیں (ii) مساوی جز $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (iii) مختلف جز $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$

2. (i) $k = \pm 2\sqrt{6}$ (ii) $k = 6$

3- ہاں 40 میٹر اور 20 میٹر -4 نہیں -5 ہاں، 20 میٹر، 20 میٹر

مشق 5.1

1- (i) ہاں 15, 23, 31 ایک AP ہے کیونکہ اگلارکن پچھلے رکن میں 8 جمع کرنے پر حاصل ہو جاتا ہے۔

(ii) نہیں صحیح ہیں L, $\left(\frac{3V}{4}\right)^2$, $\frac{3V}{4}$ (iii) ہاں 150, 200, 250 ایک AP ہے۔

(iv) نہیں، رقم کل زر ہیں L, $\left(1 + \frac{8}{100}\right)^3$, $10000\left(1 + \frac{8}{100}\right)^2$, $1000\left(1 + \frac{8}{100}\right)$

2. (i) 10, 20, 30, 40

(ii) -2, -2, -2, -2

(iii) 4, 1, -2, -5

(iv) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$

(v) -1.25, -1.50, -1.75, -2.0

3. (i) $a = 3, d = -2$ (ii) $a = -5, d = 4$ (iii) $a = \frac{1}{3}, d = \frac{4}{3}$ (iv) $a = 0.6, d = 1.1$

$$d = \frac{1}{2}; 4, \frac{9}{2}, 5, \text{ہاں (ii)} \quad \text{-4 (i) نہیں}$$

$$d = 4; 6, 10, 14 \text{ ہاں (iv)} \quad d = -2; -9.2, -11.2, -13.2 \text{ ہاں (iii)}$$

$$\text{نہیں (vi)} \quad d = \sqrt{2}; 3 + 4\sqrt{2}, 3 + 5\sqrt{2}, 3 + 6\sqrt{2} \text{ ہاں (v)}$$

$$d = 0; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \text{ہاں (viii)} \quad d = -4; -16, -20, -24, \text{ہاں (vii)}$$

$$d = a; 5a, 6a, 7a \text{ ہاں (x)} \quad \text{(ix) نہیں}$$

$$d = \sqrt{2}; \sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98} \text{ ہاں (xii)} \quad \text{(xi) نہیں}$$

$$d = 24; 97, 121, 145 \text{ ہاں (xv)} \quad \text{(xiv) نہیں} \quad \text{(xiii) نہیں}$$

مشق 5.2

$$1. \text{ (i) } a_n = 28 \quad \text{(ii) } d = 2 \quad \text{(iii) } a = 46 \quad \text{(iv) } n = 10 \quad \text{(v) } a_n = 3.5$$

$$2. \text{ (i) C} \quad \text{(ii) B}$$

$$3. \text{ (i) } \boxed{14} \quad \text{(ii) } \boxed{18}, \boxed{8} \quad \text{(iii) } \boxed{6\frac{1}{2}}, \boxed{8}$$

$$\text{(iv) } \boxed{-2}, \boxed{0}, \boxed{2}, \boxed{4} \quad \text{(v) } \boxed{53}, \boxed{23}, \boxed{8}, \boxed{-7}$$

$$27 \text{ (ii)} \quad 34 \text{ (i) .5} \quad \text{-4 16 واں رکن}$$

$$64 .8 \quad 178 .7 \quad \text{-6 نہیں}$$

$$65 \text{ واں رکن} \quad 1 .10 \quad \text{-9 5 واں رکن}$$

$$12. 100 \quad 13. 128 \quad 14. 60$$

$$15. 13 \quad 16. 4, 10, 16, 22, \dots$$

17- آخر سے 20 واں رکن 158 ہے

10. 20

19-11 واں رکن

18. -13, -8, -3

مشق 5.3

1. (i) 245 (ii) -180 (iii) 5505 (iv) $\frac{33}{20}$
2. (i) $1064\frac{1}{2}$ (ii) 286 (iii) -8930
3. (i) $n = 16, S_n = 440$ (ii) $d = \frac{7}{3}, s_{13} = 273$ (iii) $a = 4, S_{12} = 246$
 (iv) $d = -1, a_{10} = 8$ (v) $a = -\frac{35}{3}, a_9 = \frac{85}{3}$ (vi) $n = 5, a_n = 34$
 (vii) $n = 6, d = \frac{54}{5}$ (viii) $n = 7, a = -8$ (ix) $d = 6$
 (x) $a = 4$

4- $a = 9, 12, 15, \dots$ فارمولہ $S = 36, d = 8, a = 9$ میں رکھنے پر ہمیں ایک دوسری مساوات

$4n_2 + 5n - 636 = 0$ ملتی ہے، حل کرنے پر ہمیں ملتا ہے $12, n = -\frac{53}{4}$ ان میں سے صرف 12 ہی اس کا

جز ہے۔

$$1661 = \text{حاصل جمع} -7 \quad n = 38, S = 6973.6 \quad n = 16, d = \frac{8}{3} \quad .5$$

8. $S_{51} = 5610$ 9. n^2 10. (i) $S_{15} = 525$ (ii) $S_{15} = -465$
11. $S_1 = 3, S_2 = 4; a_2 = S_2 - S_1 = 1; S_3 = 3, a_3 = S_3 - S_2 = -1,$
 $a_{10} = S_{10} - S_9 = -15; a_n = S_n - S_{n-1} = 5 - 2n$
12. 4920 13. 960 14. 625 15. 27750 روپے

AA, $\triangle DEF \sim \triangle PQR$ ، ہاں (vi)

(v) نہیں

2. $55^\circ, 55^\circ, 55^\circ$

14- AD کو نقطہ E تک اس طرح بڑھائیے کہ $AD = DE$ اور PM کو اس طرح نقطہ N تک بڑھائیے کہ $PM = MN$ ، EC اور NR کو ملائیے۔

15. 42 سینٹی میٹر

مشق 6.4

1. 11.2 سینٹی میٹر 2.4 : 1 5.1 : 4 8.C 9.D

مشق 6.5

1- (i) ہاں، 25 سینٹی میٹر (ii) نہیں (iii) نہیں (iv) ہاں، 13 سینٹی میٹر
6. $a\sqrt{3}$ 9. 6 سینٹی میٹر 10. $6\sqrt{7}$ میٹر 11. $300\sqrt{61}$ کلومیٹر
12. 13 میٹر 17. C

مشق 6.6 (اختیاری)

1- R سے گزرتا ہوا SP کے متوازی خط کھینچیے جو QP کو بڑھانے پر T پر ملتا ہے دکھائیے $PT = PR$
2- سوال 5 کا نتیجہ (iii) استعمال کیجیے
3.7 میٹر، 2.79 میٹر

مشق 7.1

1. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $2\sqrt{a^2 + b^2}$
2. 39; 39 کلومیٹر 3- نہیں 4- ہاں 5- چمپا صحیح ہے۔
6- (i) مربع (ii) کوئی چار ضلعی نہیں (iii) متوازی الاضلاع
7. (-7,0) 8. -9,3 9. ± 4 , $QR = \sqrt{41}$, $PR = \sqrt{82}$, $9\sqrt{2}$
10. $3x + y - 5 = 0$

مشق 7.2

1. (1,3)

2. $\left(2, -\frac{5}{3}\right); \left(0, -\frac{7}{3}\right)$

2 : 7 .4

3- میٹر $\sqrt{61}$ ، 22.5 میٹر کے فاصلہ پر 5 واں خط

5. 1 : 1 ; $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

6. $x = 6, y = 3$

7. (3,-10)

10- 24 مربع اکائیاں

9- $\left(-1, \frac{7}{2}\right), (0,5), \left(1, \frac{13}{2}\right)$

8- $\left(-\frac{2}{7}, -\frac{20}{7}\right)$

مشق 7.3

k = 3 (ii)

2. k = 4 (i)

1- (i) مربع اکائیاں

4- 28 مربع اکائیاں

3- 1 مربع اکائیاں

مشق 7.4 (اختیاری)

1. 2 : 9

2. $x + 3y - 7 = 0$

3. (3,-2)

4. (1,0), (1,4)

5- (i) (4, 6), (3, 2), (6, 5) اور BD کو مختص طور پر لینے پر

(ii) (12, 2), (13, 6), (10, 3) اور CD کو مختص طور پر لینے پر $\frac{9}{2}$ مربع اکائیاں $\frac{9}{2}$ مربع اکائیاں۔ دونوں

حالتوں میں ایک ہی ہے۔

6- مربع اکائیاں 1 : 16

7. (i) D $\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$

(ii) P $\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$

(iii) Q $\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$, R $\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$ (iv) P, Q, R ایک ہی نقطہ ہے

8- متعین

(v) $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

مشق 8.1

$$1. (i) \sin A = \frac{7}{25}, \cos A = \frac{24}{25} \quad (ii) \sin C = \frac{24}{25}, \cos C = \frac{7}{25}$$

$$2. 0 \quad 3. \cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}, \tan A = \frac{3}{\sqrt{7}} \quad 4. \sin A = \frac{15}{17}, \sec A = \frac{17}{8}$$

$$5. \sin \theta = \frac{5}{13}, \cos \theta = \frac{12}{13}, \tan \theta = \frac{5}{12}, \cot \theta = \frac{12}{5}, \operatorname{cosec} \theta = \frac{13}{5}$$

$$7. (i) \frac{49}{64} \quad (ii) \frac{49}{64} \quad \text{8-ہاں}$$

$$9. (i) 1 \quad (ii) 0 \quad 10. \sin P = \frac{12}{13}, \cos P = \frac{5}{13}, \tan P = \frac{12}{5}$$

$$\text{غلط (v)} \quad \text{غلط (iv)} \quad \text{غلط (iii)} \quad \text{صحیح (ii)} \quad \text{غلط (i)} \quad \text{-11}$$

مشق 8.2

$$1. (i) 1 \quad (ii) 2 \quad (iii) \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8} \quad (iv) \frac{43 - 24\sqrt{3}}{11} \quad (v) \frac{67}{12}$$

$$2. (i) A \quad (ii) D \quad (iii) A \quad (iv) C \quad 3. \angle A = 45^\circ, \angle B = 15^\circ$$

$$\text{صحیح (v)} \quad \text{غلط (iv)} \quad \text{غلط (iii)} \quad \text{صحیح (ii)} \quad \text{غلط (i)} \quad \text{-4}$$

مشق 8.3

$$1. (i) 1 \quad (ii) 2 \quad (iii) 0 \quad (iv) 0$$

$$3. \angle A = 36^\circ \quad 5. \angle A = 22^\circ \quad 7. \cos 23^\circ + \sin 15^\circ$$

مشق 8.4

$$1. \sin A = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}}, \tan A = \frac{1}{\cot A}, \sec A = \frac{\sqrt{1 + \cot^2 A}}{\cot A}$$

$$2. \sin A = \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}, \cos A = \frac{1}{\sec A}, \tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$$

$$\cot A = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}, \operatorname{cosec} A = \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$$

3. (i) 1 (ii) 1 4. (i) B (ii) C (iii) D (iv) D

مشق 9.1

1. میٹر 10 2. $8\sqrt{3}$ میٹر 3. $2\sqrt{3}$ میٹر، 3.3 میٹر 4. $10\sqrt{3}$ میٹر
 5. $40\sqrt{3}$ میٹر 6. $19\sqrt{3}$ میٹر 7. $20(\sqrt{3} - 1)$ میٹر 8. $0.8(\sqrt{3} + 1)$ میٹر
 9. $16\frac{2}{3}$ میٹر 10. $20\sqrt{3}$ میٹر 11. $10\sqrt{3}$ میٹر 12. $7(\sqrt{3} + 1)$ میٹر
 13. $50\sqrt{3}$ میٹر 14. $\frac{294}{5}\sqrt{3}$ میٹر 15. سینڈ 5.3

مشق 10.1

1. لامحدود
 2. (i) ایک (ii) Secant (iii) دو (iv) نقطہ مماس
 3. D

مشق 10.2

1. A 2. B 3. A 6. سینٹی میٹر 3
 7. سینٹی میٹر 8 12. $AB = 15$ سینٹی میٹر، $AC = 13$ سینٹی میٹر

مشق 12.1

1. سینٹی میٹر 28 2. سینٹی میٹر 10
 3- سونا: مربع سینٹی میٹر 346.5، لال: مربع سینٹی میٹر 1039.5، نیلا: مربع سینٹی میٹر 1732.5، کالا: 2425.5؛ مربع سینٹی میٹر سفید: 3118.5 مربع سینٹی میٹر۔

4. 4375 5. A

مشق 12.2

$$-1 \frac{132}{7} \text{ مربع سینٹی میٹر} \quad -2 \frac{77}{8} \text{ مربع سینٹی میٹر} \quad -3 \frac{154}{3} \text{ مربع سینٹی میٹر}$$

$$-4 \text{ (i) } 28.5 \text{ مربع سینٹی میٹر} \quad \text{(ii) } 235.5 \text{ مربع سینٹی میٹر}$$

$$-5 \quad 22(i) \text{ سینٹی میٹر} \quad 231(ii) \text{ مربع سینٹی میٹر} \quad (iii) \left(231 - \frac{441\sqrt{3}}{4} \right) \text{ مربع سینٹی میٹر}$$

$$-6 \quad 20.4375 \text{ مربع سینٹی میٹر؛ } 686.0625 \text{ مربع سینٹی میٹر} \quad 88.447 \text{ مربع سینٹی میٹر}$$

$$-8 \quad 19.625(i) \text{ مربع میٹر} \quad 58.875(ii) \text{ مربع سینٹی میٹر} \quad 9-285(i) \text{ ملی میٹر} \quad (ii) \frac{385}{4} \text{ مربع ملی میٹر}$$

$$-10 \quad \frac{22275}{28} \text{ مربع سینٹی میٹر} \quad -11 \quad \frac{158125}{126} \text{ مربع سینٹی میٹر} \quad -12 \quad 189.97 \text{ کلو مربع میٹر}$$

$$-13 \quad 162.68 \text{ روپے} \quad 14. D$$

مشق 12.3

$$-1 \quad \frac{4523}{28} \text{ مربع سینٹی میٹر} \quad -2 \quad \frac{154}{3} \text{ مربع سینٹی میٹر} \quad -3 \quad 42 \text{ مربع سینٹی میٹر}$$

$$-4 \quad \left(\frac{660}{7} + 36\sqrt{3} \right) \text{ مربع سینٹی میٹر} \quad -5 \quad \frac{68}{7} \text{ مربع سینٹی میٹر} \quad -6 \quad \left(\frac{22528}{7} - 768\sqrt{3} \right) \text{ مربع سینٹی میٹر}$$

$$-7 \quad 42 \text{ مربع سینٹی میٹر} \quad -8 \quad (i) \frac{2804}{7} \text{ میٹر} \quad (ii) 4320 \text{ مربع میٹر}$$

$$-9 \quad 66.5 \text{ مربع سینٹی میٹر} \quad -10 \quad 1620.5 \text{ مربع سینٹی میٹر} \quad -11 \quad 378 \text{ مربع سینٹی میٹر}$$

$$-12 \quad \frac{77}{8} \text{ مربع سینٹی میٹر} \quad (ii) \frac{49}{8} \text{ مربع سینٹی میٹر} \quad -13 \quad 228 \text{ مربع سینٹی میٹر}$$

$$-14 \quad \frac{308}{3} \text{ مربع سینٹی میٹر} \quad -15 \quad 98 \text{ مربع سینٹی میٹر} \quad -16 \quad \frac{256}{7} \text{ مربع سینٹی میٹر}$$

مشق 13.1

$$-1 \quad 160 \text{ مربع سینٹی میٹر} \quad -2 \quad 572 \text{ مربع سینٹی میٹر} \quad -3 \quad 214.5 \text{ مربع سینٹی میٹر}$$

-4

$$-5 \quad \frac{1}{4} l^2 (\pi + 24) \quad -6 \quad 220 \text{ ملی میٹر} \quad -7 \quad 22000 \text{ روپے، } 44 \text{ مربع میٹر}$$

$$-8 \quad 18 \text{ مربع سینٹی میٹر} \quad -9 \quad 374 \text{ مربع سینٹی میٹر}$$

مشق 13.2

$$-1 \quad \pi \text{ مکعب سینٹی میٹر}$$

2- 66 مکعب سینٹی میٹر موڈل کے اندر حجم = اندر کی ہوا کا حجم (مخروط + استوانہ + مخروط) جہاں r مخروط اور استوانہ کا نصف

$$\text{قطر، } h_1 \text{ مخروط اور } h_2 \text{ استوانہ کی اونچائی کی، } \left(\frac{1}{3} \pi r^2 h_1 + \pi r^2 h_2 + \frac{1}{3} \pi r^2 h_1 \right) \\ \text{مطلوبہ حجم} = \frac{1}{3} \pi r^2 (h_1 + 3h_2 + h_1)$$

- 3- 338 مکعب سینٹی میٹر 4- 523.53 مکعب سینٹی میٹر 5.100 6- 892.26 کلوگرام
7- 1.131 مکعب سینٹی میٹر تقریباً 8- صحیح نہیں ہے صحیح جواب ہے 346.51 مکعب سینٹی میٹر

مشق 13.3

- 1- 2.74 سینٹی میٹر 2- 12 سینٹی میٹر 3- 2.5 میٹر
4- 1.125 میٹر 5. 15 6. 400
7- 36 سینٹی میٹر؛ $12\sqrt{13}$ سینٹی میٹر
8- 562500 مربع میٹر یا 56.25 ہیکٹیئر
9- 100 منٹ

مشق 13.4

- 1- $102\frac{2}{3}$ مکعب سینٹی میٹر 2- 48 مربع سینٹی میٹر 3. $710\frac{2}{7}$ مربع سینٹی میٹر
4- دودھ کی قیمت 209 روپیہ اور دھات کی نسبت کی قیمت 156.75 - 5. 7964.4

مشق 13.5 (اختیاری)

- 1- 11؛ میٹر 125.6 کلوگرام 1.533 2- 52.75 مکعب سینٹی میٹر؛ 30.14 مکعب سینٹی میٹر
3. 1792 4- $782\frac{4}{7}$ مربع سینٹی میٹر

مشق 14.1

- 1- 8.1 پودے: ہم نے راست طریقہ استعمال کیا ہے کیونکہ x_1 اور f کی قدریں بہت چھوٹی ہیں۔

2. 545.20 روپے
3. $f = 20$
4. 75.9
5. 57.19
6. 211 روپے
7. 0.099 ppm
8. 12.48 دن
9. 69.43 فیصد

مشق 14.2

- 1- موڈ = 36.8 سال، درمیانہ = 35.37 سال، اسپتال میں داخل ہونے والے مریضوں کی اعظم تعداد 36.8 سال (تقریباً) جب کہ داخل ہونے والے مریضوں کی اوسط عمر 35.37 سال
2- 62.425 گھنٹے
3- موڈل ماہانہ خرچ = 1847.83 روپے، درمیانہ ماہانہ خرچ = 2662.5 روپے
4- موڈ: 30.6، درمیانہ = 29.2 زیادہ تر صوبہ UT میں طلباء اور اساتذہ کی نسبت 30.6 اور اوسط پر یہ نسبت 29.2 ہے۔
5- موڈ 4608.7 رن
6- 44.7 کاریں

مشق 14.3

- 1- وسطانیہ = 137 اکائیاں، درمیانہ = 137.05 اکائیاں، موڈ 135.76 اکائیاں
اس حالت میں تینوں پیمائش تقریباً مساوی ہیں۔
2- $x = 8, y = 7$
3- وسطانیہ عمر = 35.76 سال
4- وسطانیہ لمبائی = 146.75 ملی میٹر
5- وسطانیہ عمر = 3406.98 گھنٹے

- 6- وسطانیہ = 8.05، درمیانہ 8.32، موڈل سائز = 7.88،
7- وسطانیہ وزن = 556.67kg کلوگرام

مشق 14.4

- 1- نقاط (200, 50) اور (120, 12), (140, 26), (160, 34), (180, 40)
کو پلاٹ کر کر اوچھو بنائے۔

مجموعی تعداد	روزانہ آمدنی (روپوں میں)
12	120 سے کم
26	140 سے کم
34	160 سے کم
40	180 سے کم
50	200 سے کم

2- نقاط (52,35) اور (38, 0), (40, 3), (42, 5), (44, 9), (46,14), (48, 28), (50, 32) کو پلاٹ کر کے اوچو بنائیے یہاں $\frac{n}{2} = 17.5$ ہے۔ اوچو پر وہ نقطہ تلاش کیجیے جن کا عرض مختص 17.5 ہے۔ اس نقطہ کا طولی مختص وسطانیہ کا ہو۔

-3

مجموعی تعداد	پیداوار 1 کلوگرام فی ہیکٹر
100	50 سے زیادہ برابر
98	55 سے زیادہ یا برابر
90	65 سے زیادہ یا برابر
78	65 سے زیادہ یا برابر
54	70 سے زیادہ یا برابر
16	75 سے زیادہ یا برابر

نقاط (75,16), (50, 100), (55, 98), (60, 90), (65, 78), (70, 54) اور (75,16) کو پلاٹ کر کے اوچو بنائیے۔

مشق 15.1

1- (i) 1 (ii) 0، ناممکن وقوعہ (iii) 1، یقینی وقوعہ

1 (iv) 0,1 (v)

2- تجربات (iii) اور (iv) کے مساوی امکائی نتائج ہیں۔

3- جب ہم ایک سکہ کو اچھالتے ہیں تب نتائج ہیڈ اور ٹیل مساوی امکائی ہیں۔ اس لئے ایک انفرادی سکہ کو اچھالنے پر ملا نتیجہ پوری طرح سے غیر یقینی ہے (جس کی پیشین گوئی نہیں کی جاسکتی)

4. B 5. 0.95 6. (i) 0 (ii) 1

7. 0.008 8. (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$

9. (i) $\frac{5}{17}$ (ii) $\frac{8}{17}$ (iii) $\frac{13}{17}$ 10. (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{17}{18}$

11. $\frac{5}{13}$ 12. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) 1
13. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$
14. (i) $\frac{1}{26}$ (ii) $\frac{3}{13}$ (iii) $\frac{3}{26}$ (iv) $\frac{1}{52}$ (v) $\frac{1}{4}$ (vi) $\frac{1}{52}$
15. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) (a) $\frac{3}{4}$ (b) 0 16. $\frac{11}{12}$
17. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{15}{19}$ 18. (i) $\frac{9}{10}$ (ii) $\frac{1}{10}$ (iii) $\frac{1}{5}$
19. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{6}$ 20. $\frac{\pi}{24}$ 21. (i) $\frac{31}{36}$ (ii) $\frac{5}{36}$
22. (i)

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	دونوں پانسوں پر حاصل جمع
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	احتمال

(ii) نہیں، 11 حاصل جمع مساوی امکانی نہیں ہیں۔

23. $\frac{3}{4}$ ؛ ممکنہ نتائج ہیں THH، THT، TTH، HTT، HTH، HHT، TTT، HHH یہاں THT کا

مطلب ہے پہلے ٹاس میں ٹیل دوسرے ٹاس میں ہیڈ اور تیسرے ٹاس میں ہیڈ اور آگے تک

$$-24 \quad \frac{11}{36} \text{ (ii)} \quad \frac{25}{36} \text{ (i)}$$

25. (i) غلط: ہم نتائج کی درجہ بندی کر سکتے ہیں لیکن پھر یہ مساوی امکانی نہیں ہوں گے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ ان میں سے

ایک دو طریقوں سے آسکتا ہے۔ پہلے پر ہیڈ اور دوسرے پر ٹیل یا پہلے پر ٹیل یا دوسرے میں ہیڈ یہ دو ہیڈ (یا ٹیل) کے

طور پر مساوی امکانی ہوں گے۔

(ii) صحیح: اس سوال میں لئے گئے دو مساوی امکانی ہیں۔

مشق 15.2 (اختیاری)

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{8}{25}$ (iii) $\frac{4}{5}$

2.

	1	2	2	3	3	6
1	2	3	3	4	4	7
2	3	4	4	5	5	8
2	4	4	4	5	5	8
3	4	5	5	6	6	9
3	4	5	5	6	6	9
6	7	8	8	9	9	12

(i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{9}$ (iii) $\frac{5}{12}$

3. 10

4. $\frac{x}{12}, x = 3$

5. 8

مشق A1.1

1- (i) مبہم (ii) صحیح (iii) صحیح (iv) مبہم (v) مبہم

2- (i) صحیح (ii) صحیح (iii) غلط (iv) صحیح (v) صحیح

3- صرف (ii) صحیح ہے۔

4- (i) اگر $a < 0$ اور $a^2 > b^2$ تب $a > b$

(ii) اگر $xy \geq 0$ اور $x^2 = y^2$ تب $x = y$

(iii) اگر $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ اور $y \neq 0$ تب $x = 0$

(iv) متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

مشق A1.2

- 1- A فانی ہے۔
2. ab ناطق ہیں۔
- 3- $\sqrt{17}$ کا عشری پھیلاؤ غیر مختتم اور غیر تکراری ہے۔
- 4- $y = 7$
- 5- $\angle A = 100^\circ, \angle C = 100^\circ, \angle D = 180^\circ$
- 6- PQRS ایک مستطیل ہے۔
- 7- ہاں premise کی وجہ سے، نہیں کیونکہ $\sqrt{3721} = 61$ جو ناطق نہیں ہے کیونکہ Premise غلط تھا۔ اس لئے نتیجہ بھی غلط ہے۔

مشق A1.3

- 1- دو لگاتار اعداد $2n + 1$ اور $2n + 3$ لیجئے جہاں n کوئی صحیح عدد ہے۔

مشق A1.4

- 1- (i) آدمی فانی نہیں ہے۔
 - (ii) خط $m \parallel l$ کے متوازی نہیں ہے۔
 - (iii) اس باب میں زیادہ مشقیں نہیں ہیں۔
 - (iv) تمام صحیح اعداد ناطق اعداد نہیں ہیں
 - (v) تمام مفرد اعداد ناطق نہیں ہیں
 - (vi) کچھ طلبا کا بل ہیں
 - (vii) تمام بلیاں کالی ہیں
 - (viii) کم سے کم ایک حقیقی عدد ہے $\sqrt{x} = -1$
 - (ix) 2 مثبت صحیح عدد a کو تقسیم نہیں کرتا۔
 - (x) صحیح اعداد a اور b ہم منفرد نہیں ہیں۔
- 2- (i) ہاں (ii) نہیں (iii) نہیں (iv) نہیں (v) ہاں

مشق A1.5

- 1- (i) اگر شرن کو بہت پسینا آتا تب ٹوکیو میں گرمی ہے۔
- (ii) اگر شالنی کے پیٹ میں چوہے کودتے ہیں تب وہ بھوکی ہے۔
- (iii) اگر جسونت کو ڈگری ملتی ہے تب اس کے پاس اسکا لرشپ ہوئی ہے
- (iv) اگر ایک پودا زندہ ہے تب اس میں پھول ہے۔
- (v) اگر جانور کی دم ہے تب یہ بلی ہے۔
- 2- (i) اگر ΔABC کے قاعدہ کے زاویہ مساوی ہوں تب یہ مساوی الساقین مثلث ہے۔ صحیح ہے۔
- (ii) اگر ایک صحیح عدد کا مربع طاق ہے تب صحیح عدد طاق ہے۔ صحیح ہے۔
- (iii) اگر $x = 1$ ، تب $x^2 = 1$ صحیح ہے۔
- (iv) اگر AC اور BD ایک دوسرے کی تصنیف کرتے ہیں تب ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے، صحیح ہے۔
- (v) اگر $a + (b + c) = (a + b) + c$ تب a, b, c مکمل اعداد ہیں، غلط۔
- (vi) اگر $x + y$ ایک جفت عدد ہے تب x اور y طاق ہیں، غلط۔
- (vii) اگر متوازی الاضلاع مستطیل ہے تو اس کے راس دائرہ پر ہیں، صحیح۔

مشق A1.6

- 1- فرض کیجیے اس کے برخلاف $b \leq d$ ۔
- 3- باب 1 کی مثال 10 دیکھیے۔
- 6- نویں جماعت کی ریاضی کی درسی کتاب کا مسئلہ 5.1 دیکھیے۔

مشق A2.2

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) 160
- 2- ایک مربع سینٹی میٹر کا رقبہ لیجیے اور اس میں ڈاٹ گنئے۔ درختوں کی کل تعداد اس عدد اور رقبہ (مربع سینٹی میٹر میں) کے حاصل ضرب کے برابر ہوگی۔

3- قنطوں کی اسکیم میں سوڈ کی شرح 17.74 فیصد ہے جو 18 فیصد سے کم ہے۔

مشق A2.3

1- طلبا اپنا جواب خود معلوم کر سکتے ہیں۔

© NCERT
not to be republished