5013CH15

15

احتمال (PROBABILITY)

نظریہ احتمال اور نظریہ اغلاط دونوں ہی اب ان مسائل کے ایک بڑے مجموعے کی تشکیل کرتے ہیں جو نہ صرف ریاضی کی دلچسپی کا خاص موضوع ہیں بلکہ عمل اعتبار سے بھی غیرمعمولی ریاضیاتی اہمیت کے حامل ہے ۔

آر۔ایس۔ووڈوارڈ (R.S.Woodward)

1.1 تعارف

جماعت کلاس میں اپنے وقوعات کی تجرباتی (یا علمی) احتمال کے بارے پڑھا تھا جس کی بنیاد اصل تجربات کے نتائج پر تھی۔ہم نے مسئلہ سکہ کو 1000 مرتبہ اچھالے جانے والے تجربہ پر بحث کی تھی جس میں کا تعداد تھا۔

ہیڈ : 445 ٹیل : 545

اس تجربہ کی بنیاد کی بنا پر ہیڈ آنے کا علمی (Empirical) احتمال $\frac{455}{1000}$ یعنی 0.455 اور ٹیل آنے کا احتمال 0.545 (نویں جماعت کی ریاضی کی درسی کتاب کے باب 15 کی مثال 1 بھی دیکھئے) نوٹ کیجئے کہ ان احتمال کی بنیاد ایک سکہ کو 1000 بار اچھالے جانے والے اصل تجربہ کے نتائج پر ہے۔اس وجہ سے یہ تجرباتی یا علمی احتمال کہلاتے ہیں۔دراصل تجرباتی احتمالوں کی بنیاد اصل تجربات کے نتائج اور وقوعات کے واقع ہونے بہتر ریکارڈنگ پر ہے۔مزید یہ احتمال صرف اندازے ہیں اگر ہم اسی تجربہ کو ایک بار پھر 1000 مرتبہ دہرائیں ہمیں مختلف اعداد وشمار ملیں گے جس کی وجہ سے احتمال کے اندازے بھی مختلف ہوں گے۔

نویں کلاس میں آپ نے ایک سکہ کو کئی مرتبہ اچھالا تھا اور جتنی مرتبہ ہیڈ یا ٹیل آیا تھا اس کو نوٹ کیا تھا (باب 15 کی سرگرمی 1 اور 2 دیکھیے) آپ نے یہ بھی نوٹ کیا تھا کہ جیسے جیسے اپنے سکہ کو اچھالنے کی تعداد بڑھائی تھی، ہیڈ (پائیں) آنے کا احتمال

عدد $\frac{1}{2}$ کو نزدیک تر ہوتا گیا۔ نہ صرف آپ نے بلکہ دنیا کے مختلف حصوں میں بہت سے لوگوں نے اس قسم کے تجربے کئے اور ہیڈ (یا ٹیل) کے آنے کی تعداد کو ریکارڈ کیا۔

مثال کے طور پر 18 ویں صدی کے ایک فرانسیسی Comte de Buffon نے ایک سکہ کو 4040 مرتبہ اچھالا اور اس نے پایہ کو 2048 ہیڈ آئے ۔اس طرح سے اس حالت میں ہیڈ آنے کا تجرباتی استعمال $\frac{2048}{4040}$ یعنی 0.507 تھا۔ برطانیہ کے kerrich نے ایک سکہ کو 10,000 مرتبہ اچھال کر ہیڈ آنے کی تعداد نوٹ کی جو کے 5067 تھی ،اس حالت میں ہیڈ آنے کا تجرباتی احتمال $\frac{5067}{10000} = 0.5067$ شماریات داں کارل پیرسن کو اس میں کچھ اور وقت لگا یا اس نے 24000 مرتبہ سکے کو اچھالا، اب فرض کیجئے ہم پوچھتے ہیں کہ اگر ہم اس تجربہ کو 1 میلین یا 10 ملین مرتبہ دہرائیں تو تجرباتی احتمال کیا ہوگا؟ اب وجدانی طور پر محسوس کریں گے جیسے جیسے سکہ کے اچھالے جانے کی تعداد بڑھے گی، ہیڈ یا ٹیل کے آنے کی تعداد ایک عدد 0.5 یعنی $\frac{1}{2}$ کے گرد ہی مرکوز ہوتی نظر آتی ہے۔یہی وجہ ہے کہ ہیڈ کے (پائیں کے) آنے تو تھیوریٹکل احتمال کہتے ہیں۔جیسا کہ آپ اگلے سیکشن میں دیکھیں گے۔اس باب میں ہم کسی وقوعہ کی تھیوریٹکل (یا کلاسیکل) احتمال سے آپ کو متعارف کرائیں گے اور اس تصور پر بنیاد مسئلوں پر بحث کریں گے۔

15.2 احتمال: ایک نظریاتی طریقہ کار

آیئے مندرجہ ذیل صورت حال پر غور کرتے ہیں۔

مان لیجئے ایک سکہ کو بلا منصوبہ اچھالا گیا

> جب ہم کسی سکہ کے بارے میں بات کرتے ہیں ہم یہ مان کے چلتے ہیں کہ یہ فیر ہوگا یعنی ایسی کوئی وجہ نہیں ہوگی یہ صرف ہیڈ میں آئے یا ٹیل میں آئے۔سکہ کی اس خاصیت کو ہم غیر جانب دارانہ (unbaised) کہتے ہیں جبکہ بلا منصوبہ اچھالنا سے مراد ہے کہ سکہ آزادانہ طور پر بغیر کسی مداخلت کے زمین پر گرے۔

ہم پہلے جانتے ہیں کہ سکہ صرف دو ممکنہ طریقوں سے زمین پر آئے گا یا ہیڈ کی طرف یا ٹیل کا (ہم اس امکان کو خارج کرتے ہیں کہ یہ اپنے کنارے پر کھڑا گرے، جو کے ممکن ہوسکتا ہے) اگر سکہ کسی ریت پر گرے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ ہر ایک نتائج ہیڈ یا ٹیل کے واقع ہونے کے برابر ہیں ہم اس کو کہتے ہیں کہ نتائج ہیڈ یا ٹیل مساوی امکانی ہیں۔

مساوی امکانی نتائج کی ایک اور مثال مان لیجیے ہم ایک پانسہ کو پھینکتے ہیں۔ پانسہ سے ہماری مراد انصاف پر مبنی ہمیشہ ایک پانسہ ہوتا ہے۔ممکنہ نتائج کتنے ہیں؟ یہ ہیں 1, 2, 3, 4, 5,6 ہر نمبر کے آنے کا احتمال یکساں ہے۔اس لئے ایک پانسہ کو پھینکنے پر مساوی امکان نتائج ہیں 1,2,3,4,5 اور 6

کیا ہر ایک تجربہ کے نتائج مساوی امکانی ہوتے ہیں؟ آیئے دیکھتے ہیں۔

مان لیجئے ایک بیگ میں 4 لال اور 1 نیلی گیند ہے اور آپ بیگ میں دیکھے بغیر ایک گیند نکالتے ہیں نتائج کیا ہیں۔کیا لال گیند اور نیلی گیند کے آنے کے نتائج مساوی امکانی ہیں؟ کیونکہ بیگ میں 4 لال گیندیں ہیں اور 1 لال گیند اس لئے اب اس بات سے اتفاق کریں گے کہ لال گیند کے آنے کے امکان نیلی گیند کے مقابلہ میں زیادہ ہیں۔اس لئے (لال گیند یا نیل گیند) کے نتائج مساوی امکان نہیں ہیں جب کہ کسی بھی رنگ کی گیند آنے کے نتائج مساوی امکانی ہیں۔اس لئے یہ ضروری نہیں کہ تمام تجربوں کے نتائج مساوی امکانی ہوں۔

لیکن اس باب میں صرف ان تجربات پر بحث کریں گے جس کے نتائج مساوی امکانی ہوں

نویں کلاس میں ہم نے کسی وقوعہ کا تجرباتی یا علمی احتمال کو ہم نے اس طرح معرف کیا تھا۔

$$P(E) = \frac{\text{کوشش (trial) کی وہ تعداد جس میں وقوعہ واقع ہوتا ہے}}{\text{کوششوں (trials) کی کل تعداد}}$$

احتمال کی علمی ترجمان کا استعمال ہر ایک ایسے وقوعہ کے لئے کر سکتے ہیں جو کسی ایسے تجربہ سے منسلک ہو جس کی تکرار کثیر تعداد میں دہرائی جائے۔ بہت سی صورت حال میں کسی تجربہ کی تکرار کی کچھ پابندیاں ہیں، جیسے یا تو یہ کافی مہنگا ہو سکتا ہے یا اس صورت حال کے مطابق نہیں ہے لیکن یہ سکہ اچھالنے یا شے کو پھینکنے کے سلسلہ میں یہ بہت بہتر طور پر کام کرتا ہے لیکن سکی سٹیلائٹ کو () کرنے کے تجربہ جس سے اس کے launch کے وقت ناکام ہونے کا علمی احتمال کو دہرانہ یا زلزلہ کے عمل کو علمی احتمال معلوم کرنے کے لئے دہرانا کہ زلزلہ کے دوران کثیر منزلہ عمارتیں برباد ہوتی ہیں؟

ایسے تجربہ جن میں ہم کچھ مفروضات کے لئے ذہنی طور پر تیار ہوتے ہیں تجربہ کی تکرار سے بچا سکتا ہے۔کیونکپ مفروضات درست طریقہ سے صحیح احتمال معلوم کرنے میں مدد کرتے ہیں۔مساوی امکانی نتائج کا مفروضہ (جو کے بہت سے تجربوں کے لئے Valid ہوتا ہے، جیسے اوپر دی گئی سکہ اور یا شے کی دو مثالیں) ایک ایسا مفروضہ ہے جس کی وجہ سے ہمٰں کسی وقوعہ کے احتمال کی مندرجہ ذیل تعریف ملتی ہے۔

ایک وقوعہ E کی تھوریٹیکل (یا کلاسیکل احتمال) احتمال جس P(E) لکھتے ہیں، معرف ہے

$$P(E)=\frac{\text{E کے موافق نتائج کی تعداد}}{\text{تجر تجربہ کے تمام ممکنہ نتائج}}$$

جہاں ہم یہ مان کر چلتے ہیں کہ نتائج مساوی امکانی ہیں، ہم تھیوریٹکل احتمال کو مختصراً احتمال لکھیں گے۔ احتمال کی تعریف 1795 میں Pierre Simon Laplace نے کی

پیئرے سائمن لیپلیس
(1749 – 1827)

احتمال کے نظریہ کی شروعات 16ویں صدی میں ہوئی جب ایک اطالوی ریاضی داں J.Cardan نے اس مضمون پر ایک کتاب لکھی، امکان کے کھیل پر کتاب، جب سے یہ (احتمال) وجود میں آیا، احتمال کے مطالعہ نے اپنے زمانے کے عظیم ریاضی دانوں James Bernoulli (1654–1705)، A. de Moivre (1667–1754) اور Pierre Simon Laplace ان میں کچھ ایسے نام ہیں جنھوں نے اس میدان میں بہت کچھ تعاون کیا۔ Laplace کی Theorie Analytique des Probabilités, 1812 احتمال کے نظریہ کے سلسلہ میں کسی ایک شخص کا سب سے عظیم تعاون سمجھا جاتا ہے۔ موجودہ سالوں میں احتمال کثرت سے استعمال، حیاتیات، معاشیات، جینیات، طبیعیات اور ساجیات میں ہوتا ہے۔

آیئے ان تجربات سے جڑے وقوعات کا احتمال معلوم کرتے ہیں، جو جن کے نتائج مساوی امکانی ہیں۔

مثال 1: جب ایک سکہ کو ایک بار اچھالا جاتا ہے تو ہیڈ آنے کا احتمال معلوم کیجیے۔ ٹیل آنے کا احتمال بھی معلوم کیجیے۔

حل: سکہ کے اچھالنے کے تجربہ میں ممکنہ نتائج کی تعداد 2 ہے۔ ہیڈ H اور ٹیل T مان لیجیے E، ہیڈ آنے کا وقوعہ ہے، E ہیڈ آنے کا وقوعہ ہے، E کے موافق نتائج (یعنی ہیڈ کا آنا) 1 ہے اس لئے

$$P(E)=\frac{\text{E کے موافق نتائج کی تعداد}}{\text{تمام ممکنہ نتائج کی تعداد}}=\frac{1}{2}$$

اسی طرح سے F ٹیل کے آنے کی وقوعہ ہے؛ تب

$$P(F)=P(\text{ٹیل})=\frac{1}{2}\ (\text{کیوں؟})$$

مثال 2: ایک بیگ میں ایک لال گیند، ایک نیلی گیند اور ایک پیلی گیند ہے، تمام گیندیں ایک ہی سائز کی ہیں۔ کرتیکا اس بیگ کے اندر دیکھے بغیر ایک گیند باہر نکالتی ہے۔ احتمال معلوم کیجیے۔ کہ اس

(i) پیلی گیند نکالی (ii) لال گیند نکالی (iii) نیلی گیند نکالی

حل: کارتک نے بیگ کے اندر دیکھے بغیر ایک گیند نکالی ہے، تو اس لئے یہ مساوی امکانی ہے کہ کسی بھی رنگ کی گیند نکالی گئی ہو۔

مان لیجیے Y ایک وقوعہ ہے، پیلی گیند باہر نکالنے کا، B وقوعہ ہے نیلی گیند باہر نکالنے کا، R وقوعہ ہے لال بال نکالنے کا

اب ممکنہ نتائج کی تعداد = 3

(i) وقوعہ Y کے موافق نتائج = 1

اس لئے $P(Y) = \frac{1}{3}$

(ii) اسی طرح سے $P(R) = \frac{1}{3}$ اور $P(B) = \frac{1}{3}$

ریمارک:

1۔ایک ایسا وقوعہ جس کا تجربہ میں صرف ایک نتائج ہو بنیادی وقوعہ کہلاتا ہے مثال 1 میں دونوں وقوعات E اور F بنیادی وقوعات میں ہے۔اسی طرح سے مثال 2 میں تمام وقوعات B,Y اور R بنیادی وقوعات ہیں

2۔مثال (1) میں ہم نوٹ کرتے ہیں کہ: $P(E)+P(F)=1$

مثال 2 میں ہم نوٹ کرتے ہیں: $P(Y)+P(R)+P(B)=1$

مشاہدہ کیجیئے کہ ایک تجربہ کے تمام بنیادی وقوعات کے احتمال کا حاصل جمع 1 ہوتا ہے یہ عمومی طور پر بھی صحیح ہے۔

مثال 3: فرض کیجیئے ہم ایک پانسہ کو ایک مرتبہ پھینکتے ہیں (i) 4 سے بڑے عدد آنے کا احتمال کیا ہے؟ (ii) 4 سے چھوٹے یا برابر کے عدد آنے کا احتمال کیا ہے۔

حل: یہاں E، 4 سے بڑے عدد آنے کا وقوعہ ہے، ممکنہ نتائج کی تعداد ہے 1,2,3,4,5,6 اور E کے موافق نتائج ہیں 5 اور 6۔اس لئے E کے موافق نتائج کی تعداد ہے 2۔اس لئے

$$P(E) = P(\text{4 سے بڑے عدد}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) مان لیجیے F، 4 کے برابر یا چھوٹے عدد آنے کا وقوعہ ہے

ممکنہ نتائج = 6

وقوعہ F کے موافق نتائج 1,2,3,4

اس لئے F کے موافق نتائج کی تعداد 4 ہے

اس لئے $P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

کیا مذکورہ بالا مثال میں وقوعات E اور F بنیادی وقوعات ہیں؟ نہیں یہ نہیں ہیں کیونکہ F کے 2 نتائج ہیں اور F کے 4 نتائج ہیں۔

ریمارک: مثال (i) سے ہم نوٹ کرتے ہیں کہ

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

جہاں E، ہیڈ آنے کا وقوعہ ہے اور F ٹیل آنے کا وقوعہ ہے مثال 3 کے (i) اور (ii) سے ہمیں ملتا ہے۔

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

جہاں E، >4 عدد آنے کا وقوعہ اور F، ≤ 4 عدد آنے کا وقوعہ ہے۔

نوٹ کیجیے کہ ایسا عدد حاصل کرنا جو 4 سے بڑا نہیں ہے، ایسا ہی جیسے 4 سے چھوٹا یا اس کے برابر پر عدد حاصل کرنا اور اس کا برعکس بھی

اوپر (1) اور (2) میں F، E نہیں، کے جیسا نہیں ہے 9 ہاں یہ ٹھیک ہے ہم وقوعہ E نہیں ہے کو $\overline{E}$ سے ظاہر کرتے ہیں

اس لئے $P(E) + P(\text{not}E) = 1$

یعنی $P(E) + P(\overline{E}) = 1$ جس سے ہمیں ملتا ہے $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

عمومی طور پر یہ صحیح ہے کہ ایک وقوعہ E کے لئے

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

تب وقوعہ $\overline{E}$، جو notE کو ظاہر کرتا ہے وقوعہ E کا تتمہ کہلاتا ہے

ہم یہ بھی کہتے ہیں کہ E اور $\overline{E}$ ایک دوسرے کے تتمی وقوعات میں complementary

آگے بڑھنے سے پہلے آیئے مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب معلوم کریں

(i) پانسہ کے ایک بار پھینکے جانے پر 7 سے کم عدد کے آنے کا احتمال کیا ہے۔

اس لئے (i) کا جواب دیتے ہیں

ہم جانتے ہیں کہ پانسہ کو ایک بار پھینکنے پر صرف چھ ممکنہ نتائج ہیں۔ یہ نتائج ہیں 1,2,3,4,5 اور 6 کیونکہ پانسہ کے کسی رخ پر بھی 8 مارک نہیں ہے اس لئے 8 کے موافق کوئی بھی نتائج نہیں ہے یعنی ایسے نتائج کی تعداد صفر ہے، دوسرے لفظوں میں پانسے کے ایک بار پھینکے جانے پر 8 کا آنا ناممکن ہے۔

اس لئے $\quad P(\text{8 آنے کا}) = \dfrac{0}{6} = 0$

یعنی ایسا وقوعہ کا احتمال جس کا واقع ہونا ناممکن ہے۔ صفر ہوتا ہے اور ایسا وقوعہ ناممکن وقوعہ کہلاتا ہے۔

آیئے (ii) کا جواب دیں

کیونکہ پانسہ کے ہر رخ پر 7 سے چھوٹا عدد مارک ہے۔ اس لئے پانسہ کے ایک بار پھینکے جانے پر یقینی ہے کہ 7 سے چھوٹا عدد آئے، اس لئے موافق نتائج کی تعداد وہی ہے جو تمام ممکنہ نتائج کی جو 6 ہے۔

اس لئے $\quad P(E) = P(\text{7 سے چھوٹا عدد آنے کا}) = \dfrac{6}{6} = 1$

اس لئے ایسا وقوعہ کا احتمال جو یقینی ہو، 1 ہوتا ہے۔ اور ایسا وقوعہ یقینی کہلاتا ہے۔

نوٹ: احتمال P(E) کی تعریف سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ شمار کنندہ (وقوعہ E کے موافق نتائج کی تعداد) ہمیشہ نسب نما (تمام ممکنہ نتائج کی تعداد) سے چھوٹا یا برابر ہوتا ہے۔

اس لئے $\quad \mathbf{0 \le P(E) \le 1}$

آیئے اب تاش کے پتوں سے متعلق کچھ مثالیں لیتے ہیں، کیا آپ نے تاش کے پتوں کو دیکھا ہے؟ اس میں 52 پتہ ہوتے ہیں جو 4 قسم کے ہوتے ہیں (suit) ہر سوٹ کے 13 پتہ ہوتے ہیں۔ حکم، (♠) پان، (♥) اینٹ، (♦) اور چڑی یا پھول چڑی (♣) اور حکم کالے اور پان اور اینٹ لال رنگ کے ہوتے ہیں ہر ایک سوٹ 13 میں تاش ہوتے ہیں، اِکّا، بادشاہ، بیگم، غلام، 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 بادشاہ بیگم، غلام، face cards کہلاتے ہیں۔

مثال 4: اچھی طرح پھینٹے گئے تاش کے 52 پتوں میں سے ایک کارڈ نکالا جاتا ہے احتمال معلوم کیجیے کہ پتہ (Card)

(i) اکا ہے

(ii) اکا نہیں ہے

حل: اچھی طرح پھینٹنے کا مطلب ہے مساوی امکانی نتائج

(i) تاش کی ایک گڈی میں 4 اکے ہوتے ہیں۔ مان لیجیے E، اکا آنے کا وقوعہ ہے

E کے موافق نتائج ہیں = 4

ممکنہ نتائج کی تعداد ہے = 52 (کیوں؟)

اس لئے $P(E) = = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) مان F، نکالا گیا پتہ اکا نہیں ہے، آنے کا وقوعہ ہے

وقوعہ F کے موافق نتائج کی تعداد ہے = 4 – 52 = 48 (کیوں؟)

ممکنہ نتائج کی تعداد = 52

اس لئے $P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

ریمارک: نوٹ کیجئے F وہی جو $\overline{E}$ ہے اس لئے ہم P(F) کی تحسیب اس طرح بھی کر سکتے ہیں

$$P(F)=P(\overline{E})=1-P(E)1-\frac{1}{13}=\frac{12}{13}$$

مثال 5: دو کھلاڑی، سنگیتا اور ریشما ایک ٹینس میچ کھیلتی ہیں۔ ایسا مانا جاتا ہے کہ سنگیتا کے میچ جیتنے کا احتمال 0.62 ہے۔ ریشما کے جیتنے کا احتمال معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجئے S اور R بالترتیب سنگیتا کے جیتنے، ریشما کے جیتنے کے وقوعات ہیں

(دیا ہوا ہے) P(S) = 0.62 = سنگیتا کے جیتنے کا احتمال ہے۔

P (R) = 1 – P(S) = ریشما کے جیتنے کا احتمال ہے

کیونکہ وقوعات S اور R تتمی ہیں۔

$= 1 – 0.62 = 0.38$

مثال 6: سویتا اور حمیدہ آپس میں دوست ہیں۔ احتمال معلوم کیجیے کہ دونوں کی یوم پیدائش (i) مختلف ہوگی (ii) ایک ہی ہوگی؟ (لیپ کے سال کو نظر انداز کرتے ہوئے)

حل: دونوں دوستوں میں سے ایک لڑکی، مان لیجیے سویتا کا یوم پیدائش سال کا کوئی سا بھی دن ہوسکتا ہے اور حمیدہ کا یوم پیدائش

365, دنوں میں سے کوئی سا بھی دن ہوسکتا ہے۔

ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ یہ 365 نتائج مساوی امکانی ہیں۔

(i) اگر حمیدہ کا یوم پیدائش سویتا سے مختلف ہے، تب اس کے یوم پیدائش کے موافق نتائج کی تعداد ہے۔ $365-1=364$

اس لئے $\frac{364}{365}$ = (حمیدہ کا یوم پیدائش سویتا کے یوم پیدائش سے مختلف ہے) P

(ii) (دونوں کے یوم پیدائش مختلف ہوں) P – 1 = (حمیدہ اور سویتا کا ایک ہی یوم پیدائش ہو) P

$$= 1 - \frac{364}{365}$$ [$P(\overline{E})=1-P(E)$ استعمال کرنے پر]

$$= \frac{1}{365}$$

مثال 7: ایک اسکول کی 10ویں کلاس میں 40 طلباء ہیں جن میں 25 لڑکیاں اور 15 لڑکے ہیں، کلاس کے نمائندے کی حیثیت سے کلاس ٹیچر کو ان میں سے ایک کا انتخاب کرنا ہے۔ وہ ہر ایک طالب علم کا نام یکساں قسم کے کارڈس پر لکھتی ہے۔ پھر وہ ان کارڈس کو ایک تھیلہ میں رکھ کر اچھی طرح ہلا دیتی ہے پھر وہ اس تھیلہ میں سے ایک کارڈ باہر نکالتی ہے احتمال معلوم کیجیے کہ کارڈ پر لکھا ہوا نام (i) ایک لڑکی کا ہے؟ (ii) ایک لڑکے کا

حل: 40 طلباء ہیں اور صرف ایک کارڈ (جس پر نام لکھا ہوا ہے) کا انتخاب ہونا ہے۔

(i) تمام ممکنہ نتائج کی تعداد = 40

کارڈ جس پر لڑکی کا نام لکھا ہو اس کے موافق نتائج کی تعداد = 25 (کیوں؟)

اس لئے $\frac{5}{8} = \frac{25}{40}$ = (کارڈ جس پر لڑکا کا نام لکھا ہوا ہے اس کے آنے) P

(ii) کارڈ جس پر لڑکے کا نام لکھا ہوا سکے موافق نتائج کی تعداد = 15 (کیوں؟)

اس لئے $\frac{3}{8} = \frac{15}{40}$ = (کارڈ جس پر لڑکے کا نام لکھا ہوا) P

نوٹ: ہم (لڑکا) P کو اس طرح بھی معلوم کرسکتے ہیں۔

$$P(\text{لڑکا}) = 1 - P(\text{لڑکا نہیں}) = 1 - P(\text{لڑکی}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

مثال 8: ایک بیگ میں 3 نیلے، 2 سفید اور 4 لال کنچے (Marble) ہیں۔ اگر ایک کنچہ بلا منصوبہ نکالا جاتا ہے۔ احتمال معلوم کیجئے کہ یہ ہوگا۔

(i) سفید کنچہ؟ (ii) نیلا کنچہ؟ (iii) لال کنچہ

حل: تمام کنچوں کا نکالا جانا مساوی امکانی ہے کہنے کے بجائے یہ زیادہ آسان ہے کہ کہا جائے کہ کنچے بلا منصوبے نکالے گئے۔

ممکنہ نتائج کی تعداد $= 4 + 2 + 3 = 9$ (کیوں؟)

مان لیجئے W، کنچہ سفید ہے، آنے کا وقوعہ اور B نیلے کنچہ کے آنے کا وقوعہ اور R کنچہ لال ہے۔ آنے کا وقوعہ کو ظاہر کرتے ہیں۔

(i) وقوعہ W کے موافق نتائج کی تعداد $= 2$

اس لئے $P(W) = \frac{2}{9}$

اسی طرح سے (ii) $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ اور (iii) $P(R) = \frac{4}{9}$

نوٹ کیجیے کہ $P(W) + P(B) + P(R) = 1$

مثال 9: ہر پریت دو مختلف سکہ ایک ساتھ اچھالتی ہے (مان لیجئے 1 ایک روپیہ کا اور دوسرا 2 روپیہ کا سکہ ہے) احتمال معلوم کیجیے کہ کم سے کم ایک ہیڈ آئے۔

حل: ہم ہیڈ کے لئے H اور ٹیل کے لئے T لکھتے ہیں جب دو سکہ ایک ساتھ اچھالے جاتے ہیں تو ممکنہ نتائج ہیں (H, H), (H, T), (T, H), (T, T), جو کے تمام مساوی امکانی ہیں ، یہاں (H, H) کا مطلب ہے پہلے سکے پر ہیڈ (یعنی 1 روپئے کے سکہ پر) اور دوسرے سکہ پر ہیڈ (یعنی 2 روپیہ کے سکے پر) اسی طرح سے (H, T) کا مطلب ہے پہلے سکہ پر ہیڈ اور دوسرے پر ٹیل اور اسی طرح باقی سبھی۔

وقوعہ E کم سے کم ایک ہیڈ کے موافق نتائج ہیں (H, H), (H, T) اور (T, H) (کیوں؟)

اس لئے E کے موافق نتائج کی تعداد ہے جو 3 ہے۔

اس لئے $P(E) = \frac{3}{4}$

یعنی ہر پریت کا کم سے کم ایک ہیڈ آنے کا احتمال $\frac{3}{4}$ ہے۔

نوٹ: آپ P(E) ایسے بھی معلوم کر سکتے ہیں

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad \left(\text{کیونکہ } P(\overline{E}) = P(\text{No. شیڈ}) = \frac{1}{4}\right)$$

کیا آپ نے مشاہد کیا، کہ اب تک جتنی بھی مثالیں ہم نے دیکھی: تمہیں ایک تجربہ کے نتائج متناہی ہیں؟ اگر نہیں تو جانچ کیجیے؟

بہت سے ایسے تجربات بھی ہیں جن میں نتائج دو دیئے ہوئے نمبروں میں سے ایک ہوتا ہے۔ یا جس میں دائرہ یا مستطیل کے اندر کوئی نقطہ ہوتا ہے وغیرہ، کیا اب آپ تمام ممکنہ نتائج کی تعداد کو گن سکتے ہیں؟ جیسے کہ آپ جانتے ہیں۔ یہ ممکن نہیں کیونکہ دو دیئے ہوئے اعداد کے درمیان لامحدود اعداد ہوتے ہیں اسی طرح دائرہ کے اندر لامحدود نقطے ہوتے ہیں۔ اس لئے اب تک آپ نے کلاسیکل احتمال کی جو تعریف پڑھی ہے وہ اس شکل میں استعمال نہیں ہو سکتی؟ تو پھر اس کا حل کیا ہے؟ اس کا جواب دینے کے لئے ہم مندرجہ مثال پر غور کرتے ہیں۔

مثال 10: میوزیکل کرسی کے ایک کھیل میں، اس شخص کو، جو میوزک بجا رہا ہے یہ نصیحت کی جاتی ہے کہ وہ کھیل شروع کے دو منٹ کے اندر ہی اندر میوزک بجانا بند کر دے۔ احتمال معلوم کیجئے کہ کھیل شروع ہونے کے بعد پہلے ہی آدھے منٹ میں میوزک رک جاتا ہے۔

حل: یہاں ممکنہ نتائج 0 اور 2 کے درمیانہ تمام اعداد ہیں، یہ عودی خط میں 0 اور 2 کے درمیانہ کا حصہ ہے (شکل 15.1 دیکھیے)

مان لیجئے E، میوزک پہلے آدھے منٹ میں رک جاتا ہے، کا وقوعہ ہے

اس لئے E کی موافقت میں نتائج، عددی خط 0 سے $\frac{1}{2}$ تک کے اعداد ہیں۔

0 سے 2 کا فاصلہ ہے 2، اور 0 سے $\frac{1}{2}$ تک ہے $\frac{1}{2}$۔

کیونکہ تمام نتائج مساوی امکانی ہیں، ہم بحث کر سکتے ہیں کہ کل فاصلہ 2 ہے اور وقوعہ E کے موافق فاصلہ $\frac{1}{2}$ ہے۔

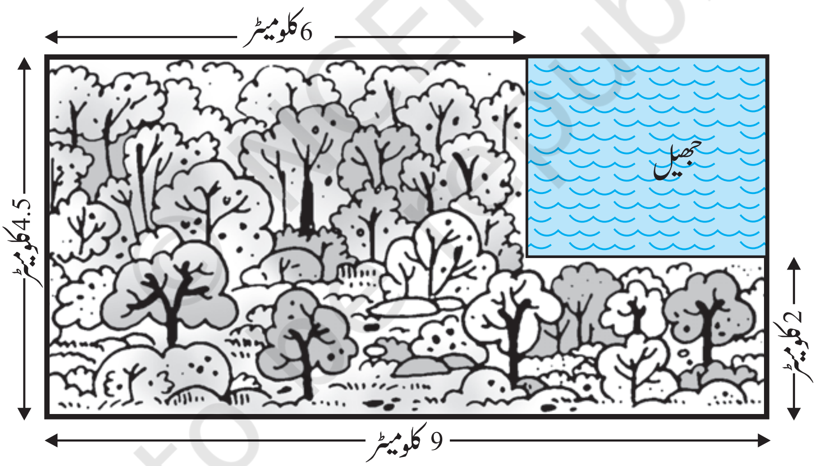
اس لئے

$$P(E) = \frac{\text{وقوعہ E کے موافق فاصلہ}}{\text{کل فاصلہ جس میں نتائج واقع ہو سکتے ہیں}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

کیا اب ہم مثال 10 میں نکالے گئے احتمال کے Idea کی توسیع موافق رقبہ (علاقہ) کی نسبت کے طور پر کر سکتے ہیں؟

مثال 11*: یہ رپورٹ کیا گیا کہ ایک گم شدہ ہیلی کاپٹر شکل 15.2 میں دکھائے گئے ایک مستطیل خطہ میں کسی جگہ تباہ ہو گیا۔ احتمال معلوم کیجیے کہ یہ شکل میں دکھائی گئی جھیل کے اندر تباہ ہوا ہے۔

حل: ہیلی کاپٹر کے خطہ میں کسی جگہ بھی تباہ ہونا مساوی امکانی ہے۔ اس پورے خطہ کا رقبہ جہاں ہیلی کاپٹر تباہ ہو سکتا ہے۔



شکل 15.2

$$= (4.5 \times 9\ km^2 = 40.5 km^2$$

جھیل کا رقبہ $= (2.5 \times 3)\ km^2 = 7.5 km^2$

اس لئے $P(\text{ہیلی کاپٹر جھیل میں Crash ہوا}) = \frac{7.5}{40.5} = \frac{75}{405} = \frac{5}{27}$

مثال 12: ایک کارٹن کے اندر 100 شرٹیں ہیں جن میں 88 شرٹیں اچھی ہیں، 8 شرٹوں میں معمولی نقص ہے اور 4 شرٹوں میں کوئی بڑا نقص ہے۔ جمی ایک ایسا تاجر ہے صرف اچھی ہی شرٹیں لینا پسند کرتا ہے لیکن ایک اور تاجرہ سجاتا صرف ان شرٹوں کو نہیں قبول کرتی جن میں کوئی بڑا نقص ہے۔ کارٹن میں سے بلا منصوبہ ایک شرٹ نکالی جاتی ہے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ

(i) یہ شرٹ جمی کے لئے قابل قبول ہوگی؟

(ii) یہ سجاتا کو قابل قبول ہوگی؟

حل: 100 شرٹوں کے کارٹن میں ایک شرٹ بلا منصوبہ نکالی گئی ہے۔ اس لئے یہاں 100 مساوی امکانی نتائج ہیں۔

(i) جمی کے موافق (یعنی قابل قبول) نتائج کی تعداد = 88 (کیوں؟)

اس لئے $P(\text{جمی کے لئے قابل قبول شرٹ}) = \frac{88}{100} = 0.88$

(ii) سجاتا کے موافق نتائج کی تعداد $= 88 + 8 = 96$ (کیوں؟)

اس لئے $P(\text{سجاتا کے لئے قابل قبول شرٹ}) = \frac{96}{100} = 0.96$

مثال 13: دو پانسہ، ایک نیلا اور ایک سلیٹی ایک ہی وقت میں پھینکے گئے۔ تمام ممکنہ نتائج لکھیے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ پانسوں کی اوپری سطح پر ظاہر ہونے والے دو اعداد کا حاصل جمع

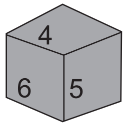
(i) 8 ہوگا؟ (ii) 13 ہوگا؟ (iii) 12 کے برابر یا اس سے کم ہوگا؟

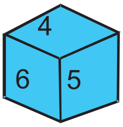
حل: جب نیلا پانسہ 1 دکھائے گا وسلیٹی رنگ کا پانسہ ان اعداد 1,2,3,4,5 اور 6 میں سے ایک دکھا سکتا ہے۔ یہی بات جب بھی صحیح ہوگی جب نیلا پانسہ '5'، '4'، '3'، '2' یا '6' دکھائیگا۔ اس تجربہ کے تمام ممکنہ نتائج مندرجہ جدول میں دکھائے گئے ہیں۔ ہر ایک مرتب کو جوڑے ہیں۔ پہلا عدد نیلے پانسے پر ظاہر ہونے والے عدد کو ظاہر کرتا ہے اور دوسرے اعداد سلیٹی پانسہ پر ظاہر ہونے والے عدد کو۔

نوٹ کیجیے کہ جو مرتب جوڑا (1,4)، (4,1) سے مختلف (کیوں؟)

اس لئے ممکنہ نتائج کی تعداد ہے $= 6 \times 6 = 36$

(i) وقوعہ E دو اعداد کا حاصل جمع 8 ہے، کے موافق نتائج ہیں۔





	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

شکل 15.3

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)

یعنی E کے موافق نتائج کی تعداد 5 = E

اس لئے $P(E) = \frac{5}{36}$

(ii) جیسا کہ آپ شکل 15.3 میں دیکھ رہے ہیں کہ ایک کوئی ممکنہ نتائج نہیں ہے جو وقوع F یعنی دو اعداد کا حاصل جمع 13 ہے کے موافق نہیں ہے اس لئے $P(F) \frac{0}{36} = 0$

(iii) جیسا کہ آپ شکل 15.3 میں دیکھ سکتے ہیں وقوعہ G دو اعداد کے حاصل جمع 12 سے کم یا برابر ہے ≤12 کے موافق نتائج ہیں 36

اس لئے $P(G) = \frac{36}{36} = 1$

مشق 15.1

1۔ مندرجہ ذیل بیانات کو مکمل کیجیے:

(i) ایک وقوعہ E کا احتمال + وقوعہ 'notE' کا احتمال = ______۔

(ii) اس وقوعہ کا احتمال جو واقع نہیں ہوسکتا ______ ایسا وقوعہ ______ کہلاتا ہے۔

(iii) اس وقوعہ کا احتمال جس کا واقع ہونا یقینی ہے ______ ایسا وقوعہ ______ کہلاتا ہے۔

(iv) ایک تجربہ میں تمام بنیادی وقوعات کے احتمال کا حاصل جمع ______ ہوتا ہے۔

(v) کسی وقوعہ کا احتمال ______ سے بڑا یا برابر ہوتا ہے اور ______ سے چھوٹا یا برابر ہوتا ہے۔

2۔ مندرجہ ذیل کون سے تجربات میں مساوی امکان نتائج ہیں؟ تشریح کیجیے۔

(i) ایک ڈرائیور کار کو اسٹارٹ کرنے کی کوشش کرتا ہے۔ کار اسٹارٹ ہوگی یا نہیں ہوگی۔

(ii) ایک کھلاڑی باسکٹ بال کو باسکٹ میں ڈالنے کی کوشش کرتا ہے وہ باسکٹ میں ڈال پاتی ہے یا نہیں ڈال پاتی۔

(iii) صحیح – یا غلط کے ایک سوال کے جواب دینے کی کوشش کی گئی۔ جواب صحیح یا غلط ہے۔

(iv) ایک بچے کی پیدائش ہوتی ہے۔ یہ ایک لڑکا ہے یا لڑکی

3۔ ایک فٹ بال کے میچ میں یہ طے کرنے کے لئے کہ کس ٹیم کو شروع میں بال ملے گی ٹاس کرنا کیوں صحیح مانا جاتا ہے؟

4۔ مندرجہ ذیل سے کون سا جواب کسی وقوعہ کا احتمال نہیں ہوسکتا؟

(A) $\frac{2}{3}$ (B) -1.5 (C) 15% (D) 0.7

5۔ اگر $P(E) = 0.05$، 'notE' کا احتمال کیا ہے؟

6۔ ایک بیگ میں صرف لیموں کی مہک والی ٹوفیاں ہیں۔ مالینی بیگ کے اندر دیکھے بغیر ایک ٹافی نکالتی ہے۔ احتمال معلوم کیجیے۔ اس

(i) سنترے کی مہک والی کینڈی نکالتی ہے؟

(ii) لیمو کی مہک والی کینڈی نکالی ہے؟

7۔ یہ دیا ہوا ہے کہ 3 طلباء کے ایک گروپ میں دو طلباء کا ایک ہی یوم پیدائش نہ ہونے کا احتمال 0.992 ہے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ دو طلباء کا ایک ہی یوم پیدائش ہوگا؟

8۔ ایک بیگ میں 3 لال گیندیں اور 5 کالی گیندیں ہیں۔ بیگ میں سے ایک گیند بلا منصوبہ نکالی جاتی ہے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ نکالی گئی گیند (i) لال؟ (ii) سفید ہے؟

9۔ ایک بکس میں 5 لال، 8 سفید اور 4 ہرے کنچے ہیں۔ بکس میں سے ایک کنچہ بلا منصوبہ نکالا جاتا ہے۔ احتمال معلو کیجیے کہ نکالا جانے والا کنچہ (i) لال ہے؟ (ii) سفید ہے؟ (iii) ہرا نہیں ہے۔

10۔ ایک گولک میں سو، 50 پیسے کے سکے ہیں، 50 ایک ایک روپے کے سکے، 20 دو دو روپے کے سکے اور 10 پانچ پانچ روپے کے سکے اور 20 روپیہ کے اور 2 روپیہ کا سکہ ہیں۔ اگر گولک کو الٹ دیا جائے تو اس بات کا امکان مساوی ہیں کہ ان میں سے کوئی سکہ نیچے گرے گا۔ احتمال معلوم کیجئے کہ سکہ (i) 50 پیسہ کا ہوگا؟

(ii) 5 روپیہ کا سکہ نہیں ہوگا۔

11۔ گوپی نے اپنے ایکوریَم کے لئے ایک دکان سے مچھلی خریدی دکاندار نے بلا منصوبہ ایک ٹینک سے جس میں 5، نر مچھلیاں 8 مادہ مچھلیاں ہیں (شکل 15.4 دیکھئے) ایک مچھلی نکالی احتمال معلوم کیجیے۔ نکالی گئی مچھلی نر ہے۔

شکل 15.4

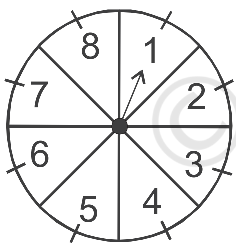
12۔ چانس کے ایک کھیل میں گھومتا ہوا ایک تیر ہوتا ہے جو رکنے کے بعد ایک عدد کی طرف نشاندہی کرتا ہے۔ وہ عدد 1,2,3,4,5,6,7,8 میں سے کوئی ایک ہوتا ہے (شکل 15.5 دیکھیے) اور یہ مساوی امکانی نتائج ہیں۔ احتمال معلوم کیجیے کہ یہ نشاندہی کرے گا

(i) 8 کی طرف؟

(ii) ایک طاق عدد کی؟

(iii) 2 بڑے عدد کی طرف؟

(iv) 9 سے چھوٹے عدد کی طرف؟



شکل 15.5

13۔ ایک پانسہ کو ایک بار پھینکا گیا۔ احتمال معلوم کیجیے

(i) ایک مفرد عدد آنے کا (ii) 2 اور 6 کے درمیانہ عدد آنے کا (iii) طاق عدد آنے کا

14۔ اچھی طرح پھینٹی گئی تاش کی 52 پتیوں کی گڈی سے ایک پتہ نکالا گیا۔ احتمال معلوم کیجیے کہ یہ پتہ:

(i) لال رنگ کے بادشاہ کا (ii) ایک فیس کارڈ یعنی تصویر والا پتہ کا ہے (iii) ایک لال رنگ کی تصویر والا پتہ کارڈ کا

(iv) پان کے غلام کا (v) ایک حکم کے پتہ کا (vi) اینٹ کی بیگم کا

15۔ اینٹ کے پانچ پتے۔ ''10، غلام، بیگم بادشاہ اور اکا کو اچھی طرح پھینٹا گیا ان کے چہروں کو نیچے کی طرف کر کے پھر بلا

منصوبہ ایک پتہ نکالا گیا۔

(i) احتمال معلوم کیجیے کہ پتہ بیگم ہے۔

(ii) اگر بیگم نکالی گئی تو اس کو ایک طرف رکھ دیجئے۔ اور پھر ایک دوسرا پتہ باقی پتیوں میں سے نکالئے۔ اور احتمال بتائیے کہ یہ پتہ (a) اکا ہے؟ (b) بیگم ہے؟

16۔ 12 خراب پین غلطی سے 32 اچھے پنوں میں مکس ہو گئے۔ پین کو صرف دیکھ کر اب اندازہ نہیں کر سکتے کہ یہ خراب ہے یا صحیح۔ ان پنوں میں سے ایک پین بلا منصوبہ نکالا گیا۔ احتمال معلوم کیجئے کہ نکالا گیا پین صحیح ہے۔

17۔ (i) 20 بلبوں کے ایک ڈھیر میں 4 بلب خراب ہیں۔ اس ڈھیر میں سے بلا منصوبہ ایک بلب نکالا گیا۔ احتمال معلوم کیجیے کہ نکالا گیا بلب خراب ہے؟

(ii) فرض کیجئے ایک بلب نکالا گیا اور یہ خراب نہیں تھا اس لئے اس کو دوبارہ اس میں واپس نہیں رکھا گیا اب باقی بچے بلبوں میں سے ایک اور بلب بلا منصوبہ نکالا گیا۔ احتمال معلوم کیجئے کہ بلب خراب نہیں ہے؟

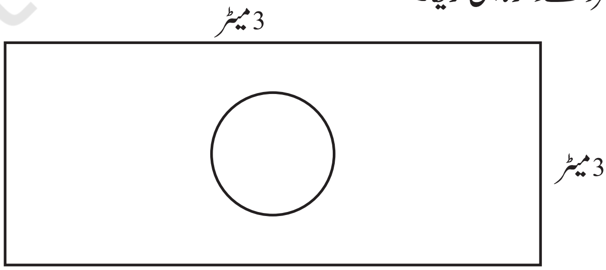
18۔ ایک بوکس میں 90 ڈسک ہیں جس پر 1 سے لے کر 90 تک کے نمبر لکھے ہوئے ہیں اگر بوکس میں سے ایک ڈسک بلا منصوبہ نکالی جاتی ہے احتمال معلوم کیجیے کہ اس ڈسک پر (i) دو ہندسی عدد لکھا ہوگا (ii) ایک کامل مربع ہوگا (iii) 5 سے تقسیم ہونے والا عدد ہوگا۔

19۔ ایک بچہ کے پاس ایک پانسہ ہے جس کے چھ رخ پر مندرجہ ذیل حروف لکھے ہوئے ہیں۔

A	B	C	D	E	A

پانسہ کو ایک بار پھینکا جاتا ہے۔ احتمال معلوم کیجیے (i) A کا؟ (ii) D کا؟

20*۔ فرض کیجئے آپ ایک پانسہ کو بلا منصوبہ شکل 15.6 میں دکھائے گئے ایک مستطیل خطہ میں پھینکتے ہیں احتمال معلوم کیجیے کہ یہ 1 میٹر قطر والے دائرہ میں گریگا۔



شکل 15.6

21۔ ایک ڈھیر میں 144 بال پین ہیں جن میں 20 پین خراب ہیں اور باقی اچھے ہیں۔ نوری پین تب ہی خریدے جب یہ اچھا ہوگا۔ اگر خراب ہوگا تو یہ نہیں خریدے گی دکاندار ایک پین بغیر منصوبہ اٹھاتا ہے اور اس کو دے دیتا ہے۔ احتمال معلوم کیجیے کہ۔

(i) وہ اس کو خریدے گی؟

(ii) وہ اس کو نہیں خریدے گی؟

22۔ مثال 13 کو دیکھئے (i) مندرجہ ذیل جدول کو مکمل کیجیے۔

وقوعہ دو پانسوں پر حاصل جمع	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
اقتسابی	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) ایک طالب علم بحث کرتا ہے کہ 11 ممکنہ نتائج میں 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 اور 12، اس لئے ان میں سے ہر ایک کا احتمال $\frac{1}{11}$ ہے۔ کیا آپ اس دلیل سے اتفاق رکھتے ہیں؟

23۔ ایک کھیل میں ایک روپے کے سکہ کو 3 مرتبہ اچھالا جاتا ہے اور ہر مرتبہ اس کے نتائج کو نوٹ کیا جاتا ہے۔ حنیف جیتے گا اگر تمام ٹوس کا نتیجہ ایک ہی ہو یعنی تین ہیڈ یا تین ٹیل ہیں تو وہ ہار جائیگا۔ احتمال معلوم کیجئے کہ حنیف کھیل ہارے گا۔

24۔ ایک پانسہ کو دو مرتبہ پھینکا گیا احتمال معلوم کیجیے کہ

(i) کسی مرتبہ بھی 5 نہیں رہیگا (ii) 5 کم سے کم ایک مرتبہ آئے گا؟

[**اشارہ:** پانسہ کو دوبارہ چھالا جائے یا دو پانسوں کو ایک ساتھ اچھالا جائے ایک ہی تجزیہ کہلاتا ہے]

25۔ مندرجہ ذیل میں کون سی دلیلیں صحیح ہیں اور کون سی صحیح نہیں ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ بھی بتائیے۔

(i) اگر دو سکوں کو ایک ساتھ اچھالا جائے تو تین ممکنہ نتائج ہوتے ہیں۔ دو ہیڈ، دو ٹیل یا دونوں ایک ایک۔ اس لئے اس میں ہر ایک نتائج کے لئے احتمال ہے $\frac{1}{3}$۔

(ii) اگر ایک پانسہ پھینکا جاتا ہے تو اس کے دو ممکنہ نتائج ہوتے ہیں۔ ایک طاق عدد یا ایک جفت عدد اس لئے اگر ایک طاق عدد آنے کا احتمال ہے $\frac{1}{2}$۔

مشق 15.2 (اختیاری)*

1۔ دوگا یک شیام اور ا یکتا ایک ہفتہ میں (منگل سے ہفتہ تک) ایک مخصوص دکان پر جاتی ہیں۔ دونوں میں سے ہر ایک کے اس دکان پر کسی نہ کسی دن جانے کے مساوی امکان ہیں۔ احتمال معلوم کیجیے کہ دونوں اس دکان پر (i) ایک ہی دن جائیں گی؟ (ii) لگاتار دو دن (جیسے منگل، بدھ، جمعرات وغیرہ؟) مختلف دنوں میں؟

2۔ ایک پانسہ پر اس طرح سے نمبر لکھے ہوئے ہیں کہ اس کے رخ جو عدد دکھاتے ہیں وہ ہیں 1,2,3,4,5,6 اس کو دو مرتبہ پھینکا گیا اور دونوں بار پھینکے جانے پر کل اسکور نوٹ کر لئے گئے مندرجہ ذیل جدول کو مکمل کیجیے جس میں دونوں بار پھینکنے کے بعد میں آنے والے کل اسکور کی کچھ قدریں دی گئی ہیں

پہلی بار پھینکنے میں عدد

6	3	3	2	2	1	+
7	4	4	3	3	2	1
8	5	5	4	4	3	2
	5					2
						3
9				5		3
12	9	9	8	8	7	6

دوسری بار پھینکنے میں عدد

احتمال معلوم کیجیے کہ کل اسکور ہے

(i) ایک جفت عدد ہے (ii) 6 ہیں (iii) کم سے کم 6 ہیں

3۔ ایک بیگ میں 5 لال گیندیں اور کچھ نیلی گیندیں ہیں۔ اگر ایک نیلی گیند کے نکالے جانے کا احتمال، لال گیند نکالے جانے کے احتمال کا دگنا ہے۔ تو بتائیے کہ بیگ میں کل کتنی گیندیں نیلی ہوں گی۔

4۔ ایک بیگ میں 12 گیندیں ہیں جن میں سے x گیندیں کالی ہیں اگر بیگ میں ایک گیند بلا منصوبہ نکالی جائے، تو احتمال معلوم کیجیے کہ یہ ایک کالی گیند ہوگی؟

اور اس بیگ میں 6 کالی گیندیں اور ڈال دی جائیں تو کالی گیند نکالے جانے کا احتمال پہلے والے احتمال کا دگنا ہوگا۔

*یہ مشق امتحان کے نقطۂ نگاہ سے نہیں ہے۔

x معلوم کیجیے۔

5۔ ایک جار میں 24 کنچے ہیں کچھ ہرے ہیں اور کچھ نیلے۔ اگر ایک کنچہ جار میں سے بلا منصوبہ نکالا جاتا ہے تو یہ ہرا ہے اس کا احتمال $\frac{2}{3}$ ہے۔ جار میں نیلے کنچوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

15.7 خلاصہ

اس باب میں مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں

1۔ تجرباتی اور تھیوریٹکل احتمالوں کے درمیان فرق

2۔ ایک وقوعہ E کا کلاسیکل احتمال کو ہم P(E) لکھتے ہیں اور اس کی تعریف اس طرح بیان کرتے ہیں۔

$$P(E)=\frac{\text{وقوعہ E کے موافق نتائج کی تعداد}}{\text{تجربہ کے تمام ممکنہ نتائج کی تعداد}}$$

جہاں ہم یہ مان کر چلتے ہیں کہ تجربہ کے نتائج مساوی امکانی ہیں۔

3۔ ایک یقینی وقوعہ کا احتمال 1 ہے۔

4۔ ایک ناممکنہ وقوعہ کا احتمال 0 ہے۔

5۔ ایک وقوعہ E کا احتمال ایک عدد P(E) ہے جب کہ

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

6۔ ایک وقوعہ جس میں صرف ایک نتائج (بنیادی) وقوعہ کہلاتا ہے۔ کسی تجربہ کے تمام بنیادی وقوعات کے احتمالوں کا حاصل جمع 1 ہے۔

7۔ کسی بھی وقوعہ E کے لئے $P(E) + P(\bar{E}) = 1$ جہاں $\bar{E}$ 'not E' کو ظاہر کرتا ہے، E اور E' تتمی وقوعات کہلاتے ہیں۔

قارئین کے لئے نوٹ

کسی وقوعہ کے تجرباتی یا علمی احتمال کے بنیاد اس پر ہے جو اصل میں واقع ہوا ہے۔ جبکہ کسی وقوعہ کا تھیوریٹکل احتمال کچھ مفروضوں کی بنیاد پر یہ کوشش کرتا ہے کہ کیا ہوگا۔ جیسے جیسے کسی تجربہ میں (کوششیں) کی تعداد بڑھتی جاتی ہے تجرباتی اور تھیوریٹکل احتمال تقریباً ایک سے ہوتے جاتے ہیں۔