5013CH02

2 کثیر رکنیاں (POLYNOMIALS)

2.1 تعارف

نویں کلاس میں آپ نے ایک متغیر والی کثیر رکنیوں اور ان کے درجہ کے بارے میں پڑھا تھا، یاد کیجئے اگر $p(x)$، x میں کوئی کثیر رکنی ہے تو $p(x)$ کی سب سے **بڑی قوت کثیر رکنی** $p(x)$ کا درجہ کہلاتی ہے۔

$4x + 2$ متغیر x میں ایک کثیر رکنی ہے جس کا درجہ 1 ہے۔

$2y^2 - 3y + 4$ متغیر y میں ایک کثیر رکنی ہے جس کا درجہ 2 ہے۔

$2, 5x^3 - 4x^2 + x - \sqrt{2}$ متغیر x میں ایک کثیر رکنی ہے جس کا درجہ 3 ہے۔

$7u^6 - \frac{3}{2} + 4u^2 + u - 8$ متغیر u میں ایک کثیر رکنی ہے جس کا درجہ 6 ہے۔

عبارتیں جیسے $\frac{1}{x-1}$، $\sqrt{x} + 2$ $\frac{1}{x^2 + 2x + 3}$ وغیرہ کثیر رکنیاں نہیں ہیں۔

درجہ 1 کی کثیر رکنی **خطی کثیر رکنی** کہلاتی ہے۔ مثال کے طور پر $2x - 3$، $\sqrt{3}x + 5$، $y + \sqrt{2}$، $x - \frac{2}{11}$، $3z + 4$، $\frac{2}{3}u + 1$ وغیرہ تمام خطی کثیر رکنیاں ہیں، کثیر رکنیاں جیسے $2x + 5 - x^2$، $x^3 + 1$ وغیرہ خطی کثیر رکنیاں نہیں ہیں۔

ایک کثیر رکنی جس کا درجہ 2 ہوتا ہے **دو درجی کثیر رکنی** کہلاتی ہے لفظ quadratic (دو درجی) "quadratic" سے اخذ کیا گیا ہے جس کا مطلب 'مربع' ہے۔ $2x^2 + 3x - \frac{2}{5}$، $y^2 - 2, 2 - x^2 + \sqrt{3}x$، $\frac{u}{3} - 2u^2 + 5, \sqrt{5}v^2 - \frac{2}{3}v, 4z^2 + \frac{1}{7}$

دو درجی کثیر رکنیوں کی کچھ مثالیں ہیں (جن کے ضریب حقیقی اعداد ہیں) مجموعی طور پر n میں کوئی بھی دو درجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c$ شکل کی ہوتی ہے، جہاں a، b اور c حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$، ایک کثیر رکنی جس کا درجہ 3 ہوتا ہے کعبی کثیر رکنی کہلاتی ہے۔ کعبی کثیر رکنی کی کچھ مثالیں ہیں۔ $2 - x^3 . x^3, \sqrt{2}x^3, 3 - x^2, + x^3, 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ درحقیقت کعبی کثیر رکنی کی عمومی شکل ہے۔

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

جہاں a، b، c اور d حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$۔

آیئے اب کثیر رکنی $p(x) = x^3 - 3x - 4$ پر غور کرتے ہیں۔ اس کثیر رکنی میں $x = 2$ رکھتے ہیں اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $p(2) = 2^2 - 3 \times 2 - 4 = -6$، کثیر رکنی $x^2 - 3x - 4$ میں x کی جگہ 2 رکھنے سے جو ہمیں قدر -6 ملتی ہے وہ $x = 2$ پر $x^2 - 3x - 4$ کی قدر ہے۔ اسی طرح سے $p(0)$ کے لئے، $p(x)$ کی $x = 0$ پر قدر ہے جو -4 ہے۔

اگر $p(x)$ یہ x میں کوئی کثیر رکنی ہے اور اگر K کوئی حقیقی عدد ہے تب $p(x)$ میں x کی جگہ k رکھنے سے جو قدر حاصل ہوتی ہے وہ $p(x)$ کی $x = k$ پر قدر ہوتی ہے۔ اور اس کو ہم $p(k)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

$p(x) = x^2 - 3x - 4$ کی $x = -1$ پر قدر کیا ہے؟ ہمارے پاس ہے:

$$p(-1) = (-1)^2 - \{3 \times (-1)\} - 4 = 0$$

مزید نوٹ کیجئے

$$p(4) = 4^2 - (3 \times 4) - 4 = 0$$

کیونکہ $p(-1)=0$ اور $p(4)=0$ اور -1 اور 4 دو درجی کثیر رکنی $x^2 - 3x - 4$ کے صفر کہلاتے ہیں۔

مجموعی طور پر k یہ کثیر رکنی $p(x)$ کا صفر کہلائے گا جب $p(k)=0$

نویں جماعت میں آپ پہلے ہی پڑھ چکے ہیں کہ کسی خطی کثیر رکنی کے صفر کیسے معلوم کئے جاتے ہیں۔ مثال کے طور پر اگر K،

$P(x)=2x+3$ کا صفر ہے تب $p(k)=0$ سے ہمیں ملتا ہے $2k+3=0$ یعنی $k = -\frac{3}{2}$

مجموعی طور پر اگر $p(x)=ax+b$ میں اگر k یہ $p(x)$ کا صفر ہو تب $p(k) = ak + b = 0$ یعنی $k = \frac{-b}{a}$

اس لئے خطی کثیر رکنی $ax + b$ کا صفر ہے $\frac{-(\text{مستقل رکن})}{x \text{ کا ضریب}} = \frac{-b}{a}$

اس طرح خطی کثیر رکنیوں کا صفر ان کے ضریب سے متعلق ہوتا ہے، کیا ایسا دوسری کثیر رکنیوں کے ساتھ بھی ہے؟ مثال کے طور پر کیا دو درجی کثیر رکنیوں کے صفر بھی ان کے ضریبوں سے متعلق ہیں؟

اس باب میں ہم ان سوالوں کے جواب دینے کی کوشش کریں گے۔ ہم کثیر رکنیوں کے تقسیمی الگورتھم کا بھی مطالعہ کریں گے۔

2.2 کثیر رکنی کے صفر کا جیومیٹریائی مفہوم

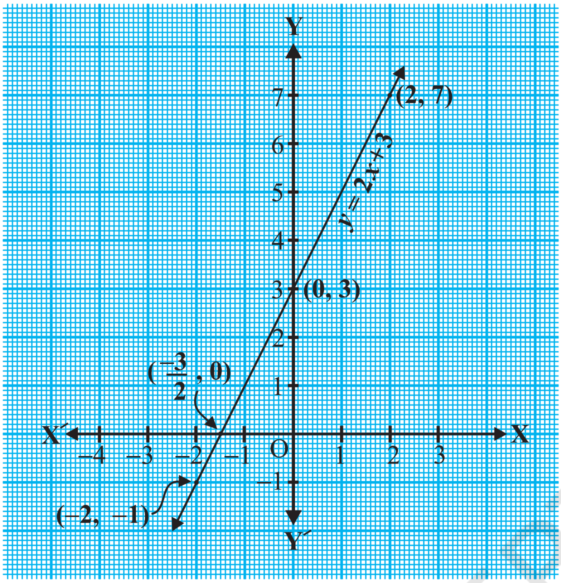
آپ جانتے ہیں کہ حقیقی عدد k کثیر رکنی $p(x)$ کا صفر ہوتا ہے اگر $p(k)=0$۔ لیکن سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ کثیر رکنیوں کے

صفر کی اتنی اہمیت کیوں ہے؟ اس کا جواب دینے کے لئے پہلے ہم خطی اور دو درجی کثیر رکنیوں کا جیومیٹریائی اظہار اور ان کے صفروں کا جیومیٹریائی مفہوم (مطلب) سمجھیں گے۔

پہلے آپ خطی کثیر رکنی $ax+b, a \neq 0$، پر غور کیجئے۔

آپ نویں کلاس میں پڑھ چکے ہیں کہ $y=ax+b$ کا گراف ایک خط مستقیم ہے۔ مثال کے طور پر $y=2x+3$ کا گراف ایک خط مستقیم ہے جو $(-2,-1)$ اور $(2, 7)$ نقطوں سے ہو کر گزرتا ہے

x	-2	2
$y=2x+3$	-1	7



شکل: 2.1

شکل 2.1 میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $y=2x+3$ کا گراف x-محور کو $x=-1$ اور $x=-2$ کے درمیان قطع کرتا ہے یعنی نقطہ $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ پر آپ یہ بھی جانتے ہیں کہ $2x+3$ کا صفر $-\frac{3}{2}$ ہے۔ اس طرح سے کثیر رکنی $2x+3$ کا صفر اس نقطہ کے x-محور کو قطع کرتا ہے۔

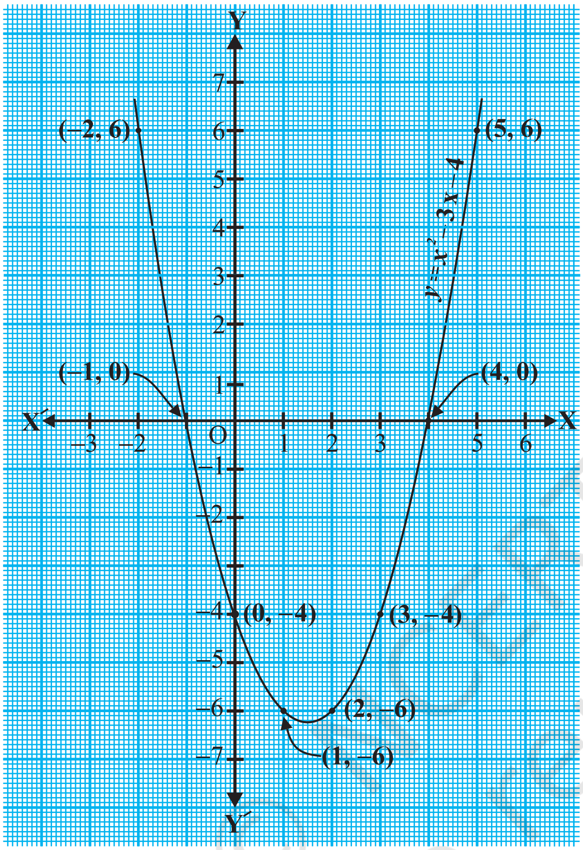
عمومی طور پر ایک خطی کثیر رکنی $ax+b$ جس میں $a \neq 0$ ہے، کے لیے $y=ax+b$ کا گراف ایک خط مستقیم ہے جو x-محور کو صرف ایک نقطہ $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ پر قطع کرتا ہے۔ اس لئے خطی کثیر رکنی $ax+b, a \neq 0$، کا صفر ایک صفر ہے اور اس نقطہ کا x- مختص ہے جہاں $y=ax+b$ کا گراف x-محور کو قطع کرتا ہے۔

آیئے اب ہم ایک دو درجی کثیر رکنی کے صفر کا جیومیٹریائی مفہوم (مطلب) پر غور کرتے ہیں دو درجی کثیر رکنی x^2-3x-4 کا گراف کیسا نظر آتا ہے، آیئے کچھ قدروں کے لئے $y=x^2-3x-4$ کی کچھ قدریں معلوم کرتے ہیں جیسا کہ جدول 2.1 میں دی گئی ہے۔

جدول 2.1

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=x^2-3x-4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

* دو درجی اور سہ درجی رکنیوں کی گراف سازی نہ تو طلباء سے کرائی جاتی ہے اور نہ ہی جانچی جاتی ہے



شکل 2.2:

اگر ہم مندرجہ بالا نقطوں کو گراف پر پلاٹ کر گراف بنائیں یہ بالکل ایسا ہی نظر آئے گا جیسا کے شکل 2.2 میں دکھایا گیا ہے۔

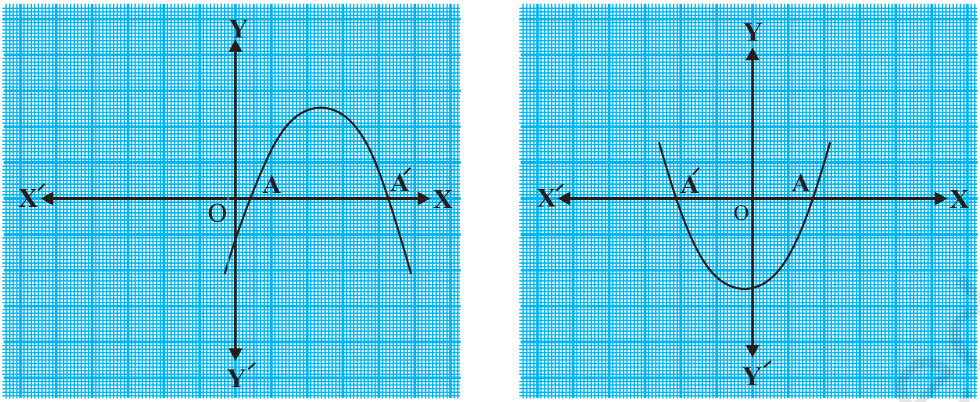
در حقیقت کسی بھی دو درجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c, a \neq 0$, کے لئے اس کی متعلقہ (نظیری) مساوات $y = ax^2 + bx + c$ کے گراف دو شکلوں میں ایک ہوگا یا تو اوپر کی طرف کھلا ہوا $\cup$ یا نیچے کی طرف کھلا ہوا $\cap$ اور یہ اس بات پر منحصر ہے کہ آیا وہ $a > 0$ یا $a < 0$ (یہ منحنیاں مکافی (parabolas) کہلاتی ہیں)۔

جدول 2.1 سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ 1– دو درجی کثیر رکنی کے صفر ہیں۔ شکل 2.2 سے مزید نوٹ کیجئے کہ 1– اور 4 ان نقطوں کے x– مختص ہیں جہاں $y = x^2 - 3x - 4$ کا گراف x محور کو قطع کرتا ہے۔ اس طرح سے دو درجی کثیر رکنی $x^2 - 3x - 4$ کے صفر ان نقطوں کے x– مختصات ہیں جہاں $x^2 - 3x - 4$ کا گراف x– محور کو قطع کرتا ہے۔

یہ حقیقت کسی بھی دو درجی کثیر رکنی کے لئے درست ہے یعنی دو درجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ کے صفر ان نقطوں کے x– مختصات ہیں جہاں $y = ax^2 + bx + c$ کو ظاہر کرنے والا مکافی (Parabola) x– محور کو قطع کرتا ہے۔

مندرجہ بالا $y = ax^2 + bx + c$ کے گراف کی شکل سے متعلق 3 حالتیں ظاہر ہوتی ہیں۔

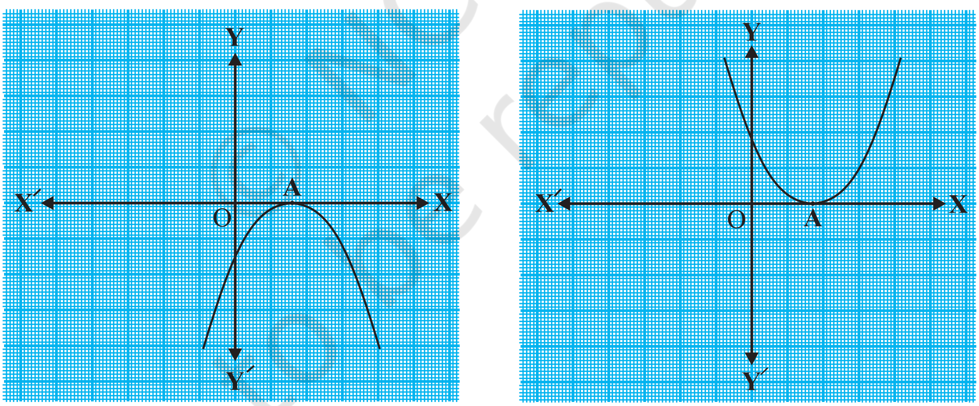
حالت (i) یہاں گراف x– محور کو دو مختلف نقاط A اور A′ پر قطع کرتا ہے A اور A′ کے x – مختصات دو درجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c$ کے صفر اس حالت کے لئے شکل 2.3 دیکھئے۔



(i) (ii)

شکل 2.3

حالت (ii) یہاں گراف x - محور کو صرف ایک نقطہ پر قطع کرتا ہے یعنی دو منطبق نقطوں پر اس لئے حالت (i) کے دو نقطے A اور A′ یہاں منطبق ہو کر ایک نقطہ A بن جاتا ہے (شکل 2.4 دیکھئے)

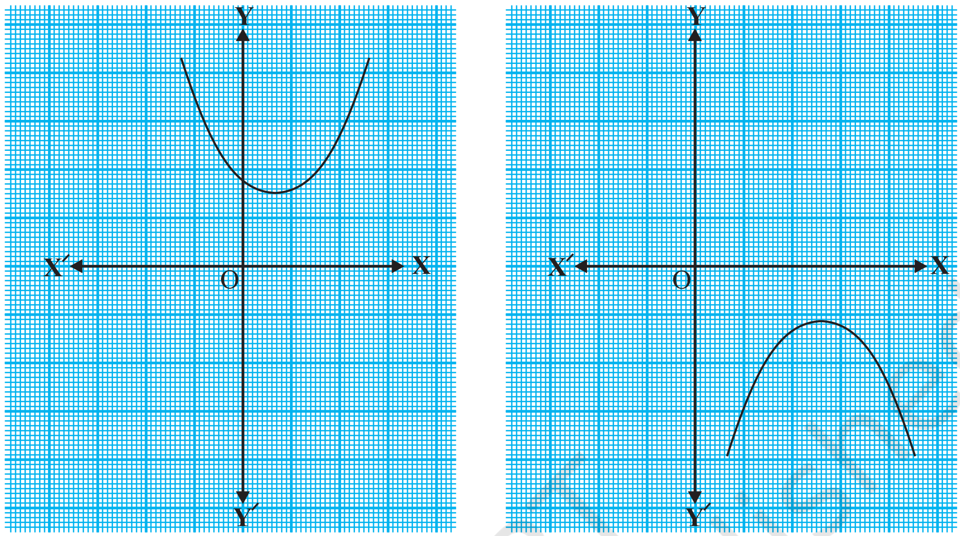


(i) (ii)

شکل 2.4

A کا x- مختص دو درجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c$ کا واحد صفر ہے۔

حالت (iii): یہاں یا تو گراف پورا کا پورا x- محور کے اوپر کی طرف ہے یا نیچے کی طرف۔ اس لئے یہ x- محور کو کسی بھی نقطہ پر قطع نہیں کرے گا (شکل 2.5 دیکھئے)۔



(i) (ii)

شکل 2.5

اس لئے اس حالت میں دو درجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c$ کا کوئی اثر نہیں ہے۔

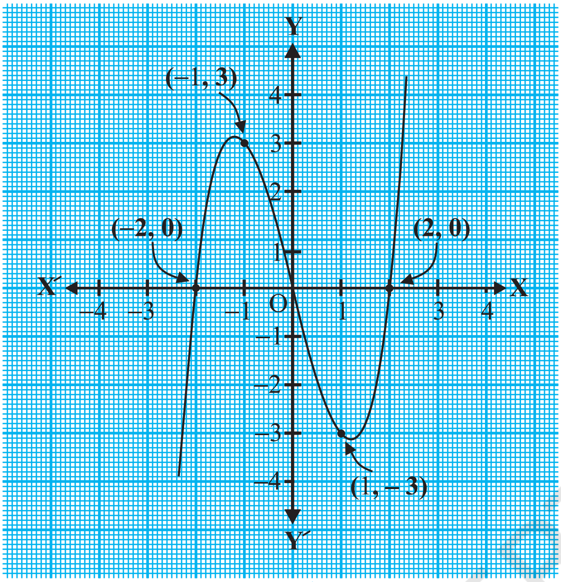
تو جیومیٹریائی طور پر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دو درجی کثیر رکنی کے یا تو مختلف صفر یا دو مساوی صفر (یعنی ایک صفر) یا کوئی صفر نہیں ہوتے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ دو درجی کثیر رکنی کے زیادہ سے زیادہ دو صفر ہو سکتے ہیں۔

کسی مکعبی کثیر رکنی کے صفر کی جیومیٹریائی مفہوم سے آپ کیا توقع رکھتے ہیں؟ اسے معلوم کرتے ہیں، کبھی کثیر رکنی $x^3 - 4x$ پر غور کیجئے۔ یہ جاننے کے لئے کہ $y = x^3 - 4x$ کا گراف کیسا نظر آتا ہے x کے نظیری y کی کچھ قدریں فہرست تیار کیجئے جیسا کہ جدول 2.2 میں دکھایا گیا ہے۔

جدول 2.2

x	-2	-1	0	1	2
$y\ x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0

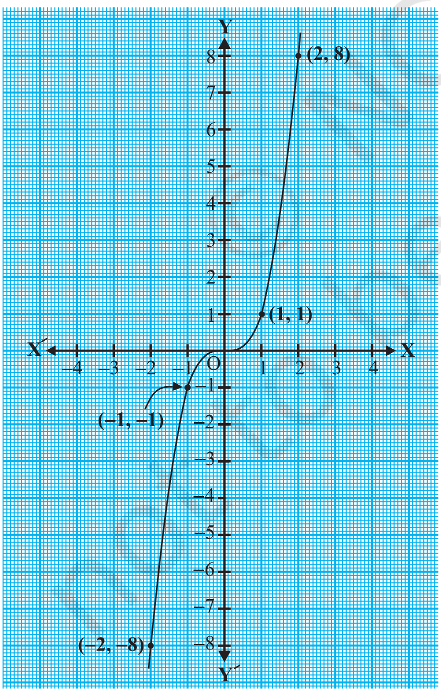
جدول میں دیے گئے نقطوں کو گراف پر پلاٹ کرنے اور گراف بنانے سے ہم دیکھتے ہیں $y = x^3 - 4x$ کا گراف دراصل شکل 2.6 کی طرح نظر آتا ہے۔



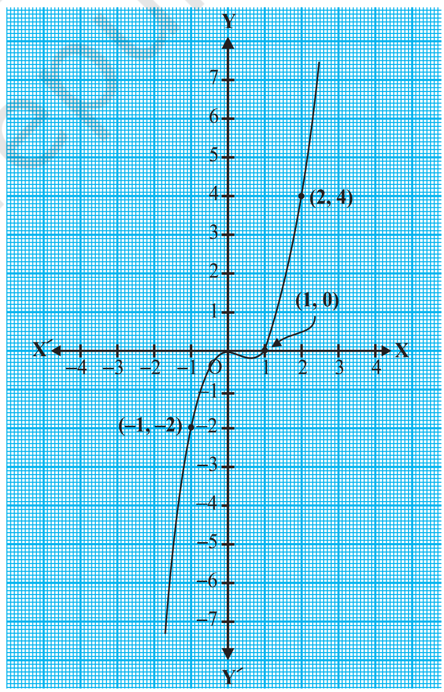
شکل 2.6

جدول سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ 2 – ، 0 اور 2 مکعبی کثیر رکنی $x^3 - 4x$ کے صفر ہیں مشاہدہ کیجئے کہ 2,0– اور 2 دراصل ان نقطوں کے x-مختص ہیں جہاں $y = x^3 - 4x$ کا گراف x-محور کو قطع کرتا ہے۔ کیونکہ منحنی x-محور کو صرف ان تین نقطوں پر قطع کرتی ہے اس لئے ان کے x-مختصات کثیر رکنی صفر ہیں۔

آیئے کچھ اور مثالیں لیتے ہیں۔ کعبی کثیر رکنیوں x^3 اور $x^3 - x^2$ پر غور کیجئے۔ ہم $y = x^3$ اور $y = x^3 - x^2$ کا گراف بالترتیب شکل 2.7 اور شکل 2.8 میں دکھاتے ہیں۔



شکل 2.7



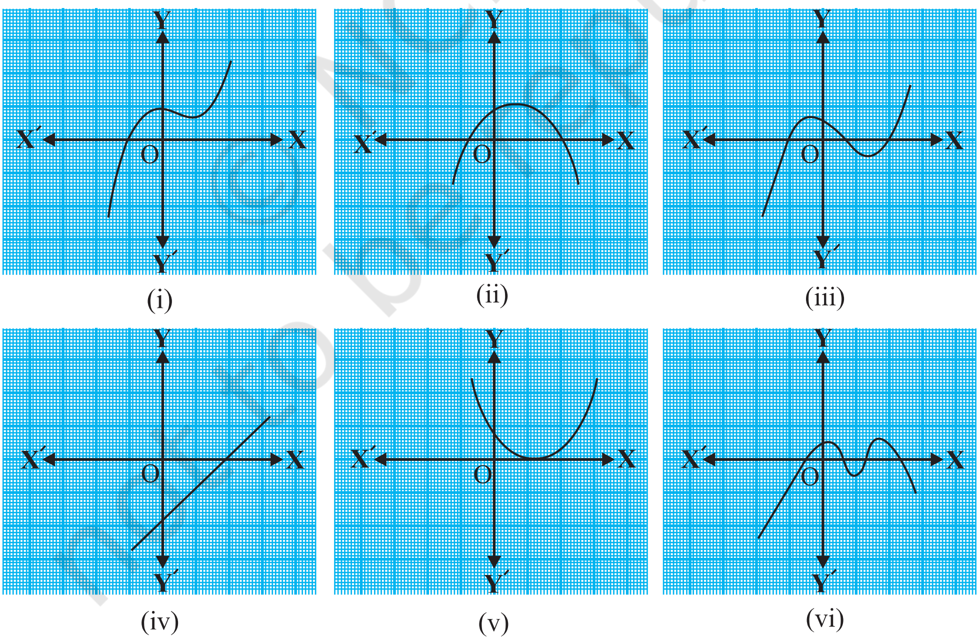
شکل 2.8

نوٹ کیجئے کہ 0 کثیر رکنی x^3 کا واحد صفر ہے۔ مزید شکل 2.7 میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ 0 اس واحد نقطے کا x – مختص ہے جہاں $y = x^3$ کا گراف x–محور کو قطع کرتا ہے۔ اسی طرح سے کیونکہ $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$، 0 اور 1 کثیر رکنی $x^3 - x^2$ کے واحد صفر ہیں۔ مزید شکل 2.8 سے، x–مختصات کی یہ قدریں وہ نقطے ہیں جہاں $y = x^3 - x^2$ کا گراف ہے– x محور کو قطع کرتا ہے۔

مذکورہ بالا مثالوں سے ہم دیکھتے ہیں کے ایک کعبی کثیر رکنی کے زیادہ سے زیادہ 3 صفر ہوتے ہیں۔ دوسرے لفظوں میں درجہ 3 کی کثیر رکنی کے زیادہ سے زیادہ 3 صفر ہوتے ہیں۔

ریمارک: عمومی طور پر، n درجہ کی ایک کثیر رکنی $p(x)$ دی ہوتی ہے۔ $y = p(x)$ کا گراف n محور کو n نقطوں پر قطع کرے گا۔ اس لئے n درجہ والی کثیر رکنی کے زیادہ سے زیادہ 3 صفر ہوں گے۔

مثال 1: نیچے دئے گئے شکل 2.9 کے گراف کو دیکھئے۔ ہرا یک $y = p(x)$ کا گراف ہے جہاں $p(x)$ ایک کثیر رکنی ہے۔ ہر ایک گراف کے لئے $p(x)$ کے صفر کی تعداد معلوم کیجئے۔



شکل 2.9

حل:

(i) صفر کی تعداد 1 ہے کیونکہ گراف x- محور کو صرف ایک نقطہ پر قطع کرتا ہے۔

(ii) صفر کی تعداد 2 ہے کیونکہ گراف x- محور کو دو نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

(iii) صفر کی تعداد 3 ہے (کیوں؟)

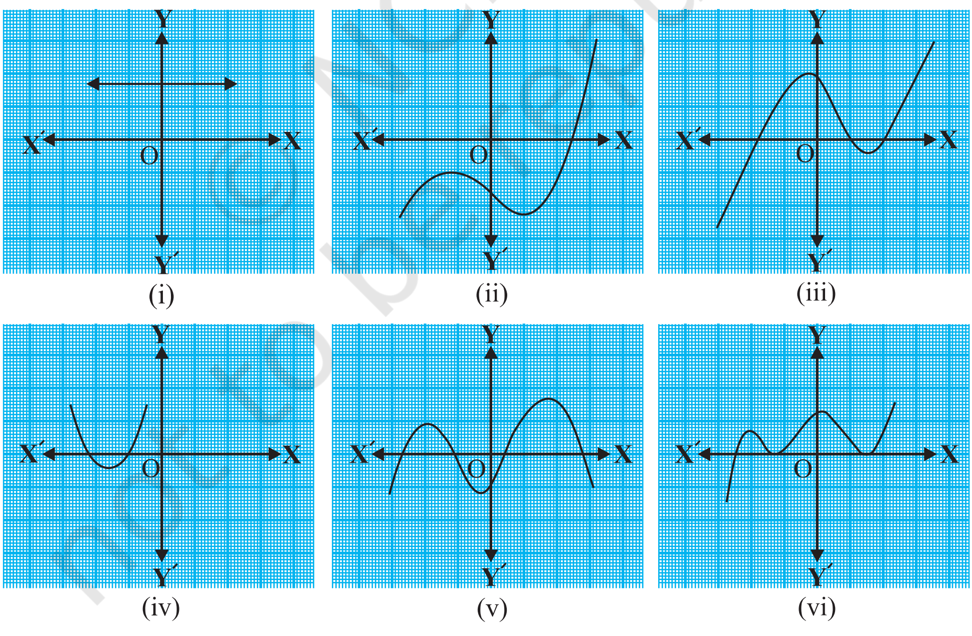
(iv) صفر کی تعداد 1 ہے (کیوں؟)

(v) صفر کی تعداد 1 ہے (کیوں؟)

(vi) صفر کی تعداد 4 ہے (کیوں؟)

مشق 2.1

1۔ نیچے شکل 2.10 میں کسی کثیر رکنی $y=p(x)$ کا گراف دیا ہوا ہے۔ ہر ایک کے لئے $p(x)$ کے صفر کی تعداد معلوم کیجئے۔



شکل 2.10

2.3 کثیر رکنی کے صفر اور ضریبوں کے درمیان تعلق

آپ پہلے ہی دیکھ چکے ہیں کہ خطی کثیر رکنی $ax + b$ کا صفر $-\frac{b}{a}$ ہے۔ اب ہم سیکشن 2.1 اٹھائے گئے سوال کا جواب دینے کی کوشش کریں گے۔ یعنی دو درجی کثیر رکنی کے صفر اور ضریبوں کے درمیان تعلق کے بارے میں اس مقصد کے لیے ایک دو درجی مساوات $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ کو لیتے ہیں۔ نویں کلاس میں آپ پڑھ چکے ہیں کہ کس طرح دو درجی کثیر رکنی کے وسطیٰ کو منقسم کر کے اس کے اجزائے ضربی بناتے ہیں۔ اس لئے یہاں ہمیں وسطیٰ رکن '$-8x$' کو منقسم کرنا ہے دو ارکان کے حاصل جمع میں جن کا حاصل ضرب $6 \times 2x^2 = 12x^2$ ہے اس لئے ہم لکھتے ہیں۔

$$2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 6x - 2x = 2x(x-3) - 2(x-3)$$
$$= (2x-2)(x-3) = 2(x-1)x-3)$$

اس لئے $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ کی قدر صفر ہے۔ جہاں $x - 1 = 0$ یا $x - 3 = 0$ یعنی جب $x = 1$ یا $x = 3$ اس لئے $2x^2 - 8x + 6$ کے صفر 1 اور 3 ہیں مشاہدہ کیجئے کہ

$$\text{صفروں کا حاصل جمع} = 1 + 3 = 4 = \frac{-(-8)}{2} = \frac{-(x \text{ کا ضریب})}{x^2 \text{ کا ضریب}}$$

$$\text{صفروں کا حاصل جمع} = 1 \times 3 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{مستقل رکن}}{x^2 \text{ کا ضریب}}$$

آیئے ایک اور دو درجی کثیر رکنی لیتے ہیں مان لیجئے $p(x) = 3x^2 + 5x - 2$ وسطیٰ رکن کو منقسم کرنے کے طریقہ سے ہمیں ملتا ہے

$$3x^2 + 5x - 2 = 3x^2 - 6x - x - 2 = 3x(x+2) - 1(x+2)$$
$$= (3x-1)(x+2)$$

اس طرح سے $3x^2 + 5x - 2$ کی قدر صفر ہے اگر یا تو $3x - 1 = 0$ یا $x + 2 = 0$ یعنی جب $x = \frac{1}{3}$ $x = -2$ اس لئے $3x^2 + 5x - 2$ کے صفر $\frac{1}{3}$ اور -2 ہیں۔

مشاہدہ کیجئے کہ

$$\text{اس کے صفروں کا حاصل جمع} = \frac{1}{3} + (-2) = \frac{-5}{3} = \frac{-(x \text{ کا ضریب})}{x^2 \text{ کا ضریب}}$$

$$\text{اس کے صفروں کا حاصل ضرب} = \frac{1}{3} \times (-2) = \frac{-2}{3} = \frac{\text{مستقل رکن}}{x^2 \text{ کا ضریب}}$$

عمومی طور پر، اگر *α، *β کثیر رکنی $p(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ کے صفر ہیں تب آپ یہ جانتے ہیں کہ $x-\alpha$ اور $x-\beta$ یہ $p(x)$ کے اجزائے ضربی ہیں اسلئے

$$ax^2+bx+c = k(x-\alpha)(x-\beta) \quad (\text{جہاں } K \text{ ایک مستقلہ ہے})$$
$$= k[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]$$
$$= kx^2 - k(\alpha+\beta)x + k\alpha\beta$$

اور مستقلہ کے ضریبوں کا دونوں طرف موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$\alpha = k,\ b = -k(\alpha+\beta)$ اور $c = k\alpha\beta$

اس سے حاصل ہوتا ہے
$$\alpha+\beta = \frac{-b}{a}$$

اور
$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

یعنی
$$\text{صفروں کا حاصل جمع} = \alpha+\beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(x \text{ کا ضریب})}{x^2 \text{ کا ضریب}}$$

$$\text{صفر کا حاصل ضرب} = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{مستقل رکن}}{x^2 \text{ کا ضریب}}$$

آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 2: دو درجی کثیر رکنی $x^2 + 7x + 10$ کے صفر معلوم کیجیے اور صفر اور ضریبوں کے درمیان تعلق کی تصدیق کیجیے۔

حل: ہمارے پاس ہے

$$x^2 + 7x + 10 = (x+2)(x+5)$$

اس لئے $x^2 + 7x + 10$ کی قدر 0 ہوگی جب $x + 2 = 0$ یا $x + 5 = 0$ یعنی جب $x = -2$ یا $x = -5$، اس لئے $x^2 + 7x + 10$ کے صفر -2 اور -5 ہیں۔ اب

$$\text{صفروں کا حاصل جمع} = -2 + (-5) = -(7) = \frac{-(7)}{1} = \frac{-(x \text{ کا ضریب})}{x^2 \text{ کا ضریب}}$$

$$\text{صفروں کا حاصل ضرب} = (-2)\times(-5) = (10) = \frac{(10)}{1} = \frac{\text{مستقل رکن}}{x^2 \text{ کا ضریب}}$$

---

*α، β یونانی زبان کے الفاظ بالترتیب 'الفا' اور 'بیٹا' کہتے ہیں۔ بعد میں ایک اور حرف 'γ' کا ہم استعمال کریں گے جسے گاما کہتے ہیں۔

مثال 3: کثیر رکنی x^2-3 کے صفر معلوم کیجئے اور اس کے صفر اور ضریبوں کے درمیان تعلق کی تصدیق کیجئے۔

حل: تماثل $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ اس کے استعمال کرنے پر ہم لکھ سکتے ہیں

$$x^2-3=\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$$

اس لئے x^2-3 کی قدر صفر ہے اگر $x=\sqrt{3}$ یا $x=-\sqrt{3}$

اس لئے x^2-3 کے صفر $\sqrt{3}$ اور $-\sqrt{3}$ ہیں

اب

$$\text{صفر کا حاصل جمع} = \sqrt{3}-\sqrt{3}=0=\frac{-(x \text{ کا ضریب})}{x^2 \text{ کا ضریب}}$$

$$\text{صفر کا حاصل ضرب} = \left(\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3}\right)=-3=\frac{-3}{1}=\frac{\text{مستقل رکن}}{x^2 \text{ کا ضریب}}$$

مثال 4: دو درجی کثیر رکنی معلوم کیجئے اگر اس کے صفر کا حاصل جمع اور حاصل ضرب بالترتیب 3– اور 2 ہے

حل: مان لیجئے دو درجی کثیر رکنی ax^2+bx+c ہے اور اس کے صفر α اور β ہیں،

ہمارے پاس ہے

$$\alpha+\beta=-3=\frac{-b}{a}$$

اور $$\alpha\beta=2=\frac{c}{a}$$

اگر $a=1$ تب $b=3$ اور $c=2$

اس لئے ایسی دو درجی کثیر رکنی جو ان شرطوں کو پوری کرتی ہے وہ x^2+3x+2

آپ جانچ کر سکتے ہیں کوئی دوسری دو درجی کثیر رکنی جو ان شرطوں کو پورا کرسکتی ہے وہ $k(x^2+3x+2)$ کی شکل کی ہوگی جہاں k حقیقی عدد ہے۔

آیئے اب مکعبی کثیر رکنیوں پر غور کرتے ہیں۔ کیا آپ سوچتے ہیں کہ کبھی کثیر رکنیوں کے صفر اور ضریبوں کے درمیان یہی تعلق درست ہے؟

آیئے $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ پر غور کیجیے۔

آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ $x = 4, -2, \frac{1}{2}$ کے لئے p(x) = 0۔ کیونکہ p(x) کے زیادہ سے زیادہ تین صفر ہو سکتے ہیں، اس لئے یہ $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ کے صفر ہیں۔ اب

صفر کا حاصل جمع $= 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{-(-5)}{2} = \dfrac{-(x \text{ کا ضریب})}{x^3 \text{ کا ضریب}}$

صفر کا حاصل ضرب $= 4 \times (-2) \times \frac{1}{2} = -4 = \frac{-8}{2} = \dfrac{-\text{مستقل رکن}}{x^3 \text{ کا ضریب}}$

لیکن یہاں ایک اور تعلق نظر آتا ہے۔ دو صفروں کو ایک ساتھ لے کر ان کے حاصل ضربوں کا حاصل جمع پر غور کیجیے۔

$$\{4 \times (-2)\} + \left\{(-2) \times \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2} \times 4\right\}$$

$$= -8 - 1 + 2 = -7 = \frac{-14}{2} = \dfrac{-(x \text{ کا ضریب})}{x^3 \text{ کا ضریب}}$$

عمومی طور پر یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر α, β, γ کعبی کثیر رکنی $ax^3 + bx^3 + cx + d$ کے صفر ہیں

تو
$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں

مثال 5: تصدیق کیجیے کہ 3، 1– اور $-\frac{1}{3}$ کعبی کثیر رکنی $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3,$ کے صفر ہیں اور پھر صفروں اور اس کے ضریبوں کے درمیان تعلق کی تصدیق کیجیے۔

حل: دی ہوئی کعبی کثیر رکنی کا $ax^3 + bx^2 + cx + d,$ سے موازنہ کیجیے، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$a = 3,\ b = -5,\ c = -11,\ d = -3.$$

مزید

$$p(3) = 3 \times 3^3 - (5 \times 3^2) - (11 \times 3) - 3 = 81 - 45 - 33 - 3 = 0,$$

$$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3 = -5 + 11 - 3 = 0,$$

* امتحان کے نقطہ نظر سے نہیں۔

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 3$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

اس لئے 3، -1 اور $-\frac{1}{3}$ کثیر رکنی $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ کے صفر ہیں۔

اس لئے ہم $\alpha = 3$، $\beta = -1$ اور $\gamma = -\frac{1}{3}$ لیتے ہیں

اب

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \times (-1) + (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 3 = -3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-11}{3} = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma = 3 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 = \frac{-(-3)}{3} = \frac{-d}{a}$$

مشق 2.2

1۔ مندرجہ ذیل دودرجی کثیر رکنیوں کے صفر معلوم کیجئے اور ان کے صفر اور ضریبوں کے درمیان تعلق کی تصدیق کیجئے۔

(i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

(iv) $4u^2 + 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2۔ دودرجی کثیر رکنی معلوم کیجئے جن کے صفروں کے حاصل جمع اور حاصل ضرب بالترتیب مندرجہ ذیل ہیں۔

(i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

(iv) $1, 1$ (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) $4, 1$

2.4 کثیر رکنیوں کا تقسیمی الگورتھم

آپ جانتے ہیں کہ کعبی کثیر رکنی کے زیادہ سے زیادہ تین صفر ہیں۔ لیکن اگر آپ کو صرف ایک صفر دیا ہوا ہو تو کیا آپ دوسرے دو صفر معلوم کر سکتے ہیں؟ ایسا کرنے کے لئے آیئے کعبی کثیر رکنی $x^3 - 3x^2 - x + 3$ پر غور کرتے ہیں۔ اگر ہم آپ کو بتائیں کہ اس کا ایک صفر 1 ہے تب آپ یہ جانتے ہیں کہ $(x-1)$ یہ $x^3 - 3x^2 - x + 3$ کا جزوِ ضربی ہوگا۔ اس لئے آپ

$x^3 - 3x^2 - x + 3$ کو $x - 1$ سے تقسیم کر سکتے ہیں جیسا کہ آپ نویں کلاس میں سیکھ چکے ہیں، ایسا کرنے سے آپ کو خارج قسمت $x^2 - 2x - 3$ کے وسطیٰ رکن کو منقسم کر کے دوسرے اجزائے ضربی $(x - 3)$ $(x + 1)$ حاصل کر سکتے ہیں۔ اس سے آپ کو ملے گا۔

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 1)(x^2 - 2x - 3)$$
$$= (x - 1)(x + 1)(x - 3)$$

اس طرح اب آپ کو مکعبی کثیر رکنی کے تینوں صفر معلوم ہیں جو ہیں، $1, -1, 3$

آیئے تفصیل سے ہم ایک کثیر رکنی کو دوسری کثیر رکنی سے تقسیم کرنے کے طریقہ پر غور کرتے ہیں۔ اقدام کو رسمی طور پر نوٹ کرنے سے پہلے ایک مثال پر غور کرتے ہیں۔

مثال 6: $2x^2 + 3x + 1$ کو $x + 2$ سے تقسیم کیجئے۔

$$\begin{array}{r|l} & 2x - 1 \\ \hline x + 2 & 2x^2 + 3x + 1 \\ & \underline{\overset{-}{}2x^2 \overset{-}{+} 4x} \\ & \quad -x + 1 \\ & \quad \underline{\overset{+}{-}x \overset{+}{-} 2} \\ & \quad\quad 3 \end{array}$$

حل: آپ نوٹ کرتے ہیں کہ ہم تقسیم کے عمل کو روک دیتے ہیں اگر یا تو باقی صفر ہو جائے یا اس کا درجہ قاسم کے درجہ سے کم ہو جائے۔ اس لئے یہاں خارج قسمت $(2x - 1)$ اور باقی 3 ہے مزید۔

$$(2x - 1)(x + 2) + 3 = 2x^2 + 3x - 2 + 3 = 2x^2 + 3x + 1$$

یعنی $2x^2 + 3x + 1 = (x + 2)(2x - 1) + 3$

اس لئے مقسوم = قاسم × خارج قسمت + باقی

اس لئے اس عمل کی توسیع ہم ایک کثیر رکنی کو دو درجی کثیر رکنی سے تقسیم کرنے کے لئے کرتے ہیں۔

مثال 7: $3x^3 + x^2 + 2x + 5$ کو $1 + 2x + x^2$ سے تقسیم کیجئے۔

$$\begin{array}{r|l} & 3x - 5 \\ \hline x^2 + 2x + 1 & 3x^3 + x^2 + 2x + 5 \\ & \underline{\overset{-}{}3x^3 \overset{-}{+} 6x^2 \overset{-}{+} 3x} \\ & \quad -5x^2 - x + 5 \\ & \quad \underline{\overset{+}{-}5x^2 \overset{+}{-} 10x \overset{+}{-} 5} \\ & \quad\quad 9x + 10 \end{array}$$

حل: سب سے پہلے ہم مقسوم اور قاسم کے ارکان کو درجہ کے حساب سے گھٹتی ہوئی ترتیب میں رکھتے ہیں۔ یاد کیجئے کہ اس طرح کثیر رکنی کے ارکان کو ترتیب میں رکھنے کا مطلب کثیر رکنی کو معیاری شکل میں لکھنا ہے۔ اس مثال میں مقسوم پہلے ہی معیاری شکل میں لکھا ہوا ہے اور قاسم کی

معیاری شکل x^2+2x+1 ۔

قدم 1: خارج قسمت کا پہلا رکن حاصل کرنے کے لئے مقسوم کی اعظم درجہ کے رکن (یعنی $3x^3$) کو قاسم کے اعظم درجہ کے رکن (یعنی x^2) سے تقسیم کیجیئے۔ یہ $3x$ ہے پر تقسیم کا عمل کیجئے۔

جو باقی بچتا ہے وہ ہے $-5x^2-x+5$

قدم 2: اب خارج قسمت کے دوسرے رکن کو حاصل کرنے کے لئے نئے مقسوم کے اعظم درجہ کے رکن (یعنی $-5x^2$) کو قاسم کے اعظم درجہ کے رکن (یعنی x^2) سے تقسیم کیجئے۔اس سے -5 ملتا ہے دوبارہ تقسیم کے عمل کو $-5x^2-x+5$ پر دہرائیے۔

قدم 3: جو باقی بچتا ہے وہ $9x+10$ ہے اب $9x+10$ کا درجہ قاسم x^2+2x+1 کے درجہ سے کم ہے۔اس لئے تقسیم کا عمل آگے جاری نہیں رکھ سکتے۔

اس لئے اب خارج قسمت $(3x-5)$ ہے اور باقی $9x+10$ مزید

$$(x^2+2x+1)\times(3x-5)+(9x+10)=3x^3+6x^2+3x-5x^2-10x-5+9x+10$$

$$=3x^3+x^2+2x+5$$

یہاں دوبارہ ہم دیکھتے ہیں کہ

مقسوم = قاسم × خارج قسمت + باقی

یہاں جو تصور ہم استعمال کر رہے ہیں وہ الگورتھم ہے جو اقلیدس کے تقسیم کے الگورتھم کے مشابہ ہے جس کو آپ نے باب 1 میں پڑھا ہے۔

اس کے مطابق

اگر $p(x)$ اور $g(x)$ دو کثیر رکنیاں ہیں جہاں $g(x)\neq 0$ تب ہم کثیر رکنیاں $q(x)$ اور $r(x)$ معلوم کر سکتے ہیں جبکہ

$$\boldsymbol{p(x)=g(x)\times q(x)+r(x)}$$

جہاں $r(x)=0$ یا $r(x)$ کا درجہ < $g(x)$ کا درجہ

یہ نتیجہ کثیر رکنیوں کا تقسیمی الگورتھم کہلاتا ہے۔

اس کے استعمال کو واضح کرنے کے لئے آیئے کچھ مثالیں لیتے ہیں۔

مثال 8: $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ کو $x - 1 - x^2$ سے تقسیم کیجئے اور تقسیمی الگورتھم کی تصدیق کیجئے۔

حل : نوٹ کیجئے کہ دی ہوئی کثیر رکنیاں معیاری شکل میں نہیں ہیں تقسیم کرنے کے لیے پہلے ان کو یعنی مقسوم اور قاسم کو معیاری شکل میں لکھئے۔ یعنی ان کے درجوں کے حساب سے گھٹتی ہوئی ترتیب میں تقسیم کا عمل بائیں طرف دکھایا گیا ہے۔

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 2 \\
\hline
-x^2 + x - 1 & -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\
 & -x^3 + x^2 - x \\
 & + \quad - \quad + \\
\hline
 & 2x^2 - 2x + 5 \\
 & 2x^2 - 2x + 2 \\
 & - \quad + \quad - \\
\hline
 & 3
\end{array}
$$

ہم یہیں رک جاتے ہیں کیونکہ (3) کا درجہ 0 ہے جو 2 سے چھوٹا ہے $-x^2 + x - 1$ کے درجہ سے۔

اس لیے خارج قسمت $x - 2$ باقی $= 3$ ہے۔

اب

قاسم × خارج قسمت + باقی

$$= (-x^2 + x = 1)(x - 2) + 3$$
$$= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3$$
$$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$$

= مقسوم

اس طرح سے تقسیمی الگورتھم کی تصدیق ہوگئی۔

مثال 9: $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ کے تمام صفر معلوم کیجئے اگر آپ جانتے ہوں کہ اس کے دو صفر $\sqrt{2}$ اور $-\sqrt{2}$ ہیں

حل : کیونکہ دو صفر $\sqrt{2}$ اور $-\sqrt{2}$ ہیں۔ $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=x^2-2$ دی ہوئی کثیر رکنی کا ایک جزو ضربی ہے اب ہم دی ہوئی کثیر رکنی کو $x^2 - 2$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 3x + 1 \\
\hline
x^2 - 2 & 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 \\
 & 2x^4 \qquad\quad - 4x^2 \\
 & - \qquad\qquad + \\
\hline
 & -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\
 & -3x^3 \qquad + 6x \\
 & + \qquad\quad - \\
\hline
 & x^2 \qquad - 2 \\
 & x^2 \qquad - 2 \\
 & - \qquad + \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

خارج قسمت کا پہلا رکن ہے $\dfrac{2x^4}{x^2} = 2x^2$

خارج قسمت کا دوسرا رکن ہے $\dfrac{-3x^3}{x^2} = -3x$

خارج قسمت کا تیسرا رکن ہے $\dfrac{x^2}{x^2} = 1$

اس لئے $2x^4-3x^3-3x^2+6x-2=(x^2-2)(2x^2-3x+1)$

اب $3x-$ کو منقسم کرنے پر ہم $2x^2-3x+1$ کے اجزائے ضربی $(2x-1)(x-1)$ معلوم کرتے ہیں۔ اس لئے اس کے صفر ہیں $x=\frac{1}{2}$ اور $x=1$ اس لئے دی ہوئی کثیررکنی کے صفر ہیں $\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ \frac{1}{2}$ اور 1۔

مشق 2.3

1۔ کثیررکنی $p(x)$ کو کثیررکنی $g(x)$ سے تقسیم کیجئے اور مندرجہ ذیل میں ہر ایک کا خارج قسمت اور باقی معلوم کیجئے۔

(i) $p(x)=x^3-3x^2+5x-3 \qquad g(x)=x^2-2$

(ii) $p(x)=x^4-3x^2+4x+5 \qquad g(x)=x^2+1-x$

(iii) $p(x)=x^4-5x+6 \qquad g(x)=2-x^2$

2۔ دوسری کثیررکنی کو پہلی کثیررکنی سے تقسیم کرکے جانچ کیجئے کہ آیا پہلی کثیررکنی دوسری کثیررکنی کا جزو ضربی ہے۔

(i) $t^2-3, 2t^4+3t^3-2t^2-9t-12$

(ii) $x^2+3x+1, 3x^4+5x^3-7x^2+2x+2$

(iii) $x^3-3x+1, x^5-4x^3+x^2+3x+1$

3۔ اگر $3x^4+6x^3-2x^2-10x-5$ کے دو صفر $\sqrt{\frac{5}{3}}$ اور $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ ہیں تو باقی صفر معلوم کیجئے۔

4۔ x^3-3x^2+x+2 کو کثیررکنی $g(x)$ سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت اور باقی بالترتیب $(x-2)$ اور $-2x+4$ ہیں۔ $g(x)$ معلوم کیجئے۔

5۔ کثیررکنیاں $p(x), g(x), q(x)$ اور $r(x)$ کی مثالیں دیجئے جو تقسیمی الگورتھم کو مطمئن کریں اور

(i) $p(x)$ کا درجہ $=$ $q(x)$ کا درجہ (ii) $q(x)$ کا درجہ $=$ $r(x)$ کا درجہ (iii) $r(x)$ کا درجہ $=0$

مشق 2.4 (اختیاری)*

1۔ تصدیق کیجئے کہ مندرجہ کعبی کثیر رکنیوں کے ساتھ دئے گئے اعداد ان کے صفر ہیں۔ ہر ایک کے لئے صفر اور ضریبوں کے درمیان تعلق کی تصدیق بھی کیجئے۔

(i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2; \frac{1}{2}, 1, -2$ (ii) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2; 1, 1, 2$

2۔ ایک کعبی کثیر رکنی معلوم کیجئے جن کے صفروں کا حاصل جمع اور دو صفر ایک ساتھ لینے پر حاصل ضربوں کا حاصل جمع اور صفر کا حاصل ضرب بالترتیب $2, -7, -14$ ہے۔

3۔ اگر کثیر رکنی $x^3 - 3x^2 + x + 1$ کے صفر $a-b, a$ اور $a+b$ ہیں تو a اور b معلوم کیجئے۔

4۔ اگر کثیر رکنی $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ کے دو صفر $2 \pm \sqrt{3}$ ہیں تو دوسرے صفر معلوم کیجئے۔

5۔ اگر کثیر رکنی $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ کو ایک دوسری کثیر رکنی $x^2 - 2x + k$ سے تقسیم کیا جاتا ہے تو باقی $x + a$ آتا ہے k اور a کی قدر معلوم کیجئے۔

2.5 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں (نقطے) سیکھیں

1۔ درجہ 2،1 اور 3 کی کثیر رکنیاں بالترتیب خطی، دو درجی اور کعبی کثیر رکنیاں کہلاتی ہیں۔

2۔ x میں حقیقی اعداد کے ضریبوں کے ساتھ کثیر رکنی $ax^2 + bx + c$ کی شکل کی ہوتی ہے۔ جہاں a, b اور c حقیقی اعداد ہیں جس میں $a \neq 0$

3۔ کثیر رکنی $p(x)$ کے صفر ان نقطوں کے x–مختصات ہیں جہاں $y = p(x)$ کا گراف x–محور کو قطع کرتا ہے۔

4۔ ایک دو درجی کثیر رکنی کے زیادہ سے زیادہ 2 اور کعبی کثیر رکنی کے زیادہ سے زیادہ 3 صفر ہوتے ہیں۔

5۔ اگر α, β دو درجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c$ کے صفر ہیں تب

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

6۔ اگر α, β, γ کعبی کثیر رکنی $ax^3 + bx^2 + cx + d$ کے صفر ہیں تب

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma=\frac{-d}{a}$$

7۔ تقسیمی الگورتھم کے مطابق دی ہوئی کوئی کثیر رکنی $p(x)$ اور ایک غیر صفر کثیر رکنی $g(x)$ کے لیے کثیر رکنیاں $q(x)$ اور $r(x)$ اس طرح ہیں کہ۔

$$p(x)=g(x)\,q(x)+r(x)$$

جہاں $r(x)=0$ یا $r(x)$ کا درجہ $<$ $g(x)$ کا درجہ۔