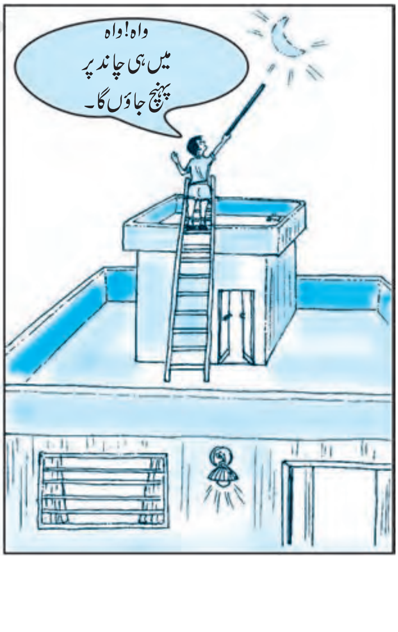
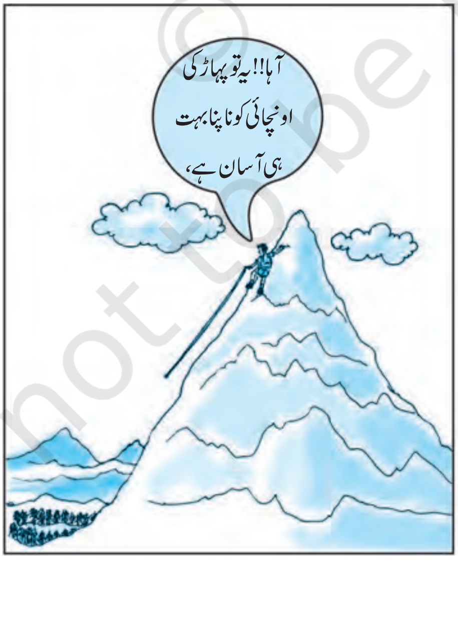
6

مثلث (TRIANGLES)

6.1 تعارف

پچھلی کلاسوں میں آپ مثلثوں اوران کی بہت سی خصوصیات سے پہلے ہی واقف ہو چکے ہیں۔نویں کلاس میں آپ نے مثلثوں کی مماثلت کے بارے میں تفصیل سے مطالعہ کیا۔یاد کیجیے کہ دواشکال متماثل ہوتی ہیں۔اگران کی شکل (Shape) اور پیمائش (Size) یکساں ہوں۔ اس باب میں ہم ان اشکال کے بارے میں پڑھیں گے جن کی شکل ایک سی ہو لیکن ضروری نہیں کے سائز بھی ایک ہی ہو۔دواشکال جن کا ایک ہی شکل ہو (ضروری نہیں کے سائز بھی ایک ہو) مشابہ اشکال کہلاتی ہیں۔مخصوص طور پر ہم مثلثوں کی مشابہت کے بارے میں پڑھیں گے اوراس علم کا استعمال پہلے سے معلوم فیثا غورث کے مسئلے کو





ثابت کرنے میں کریں گے۔

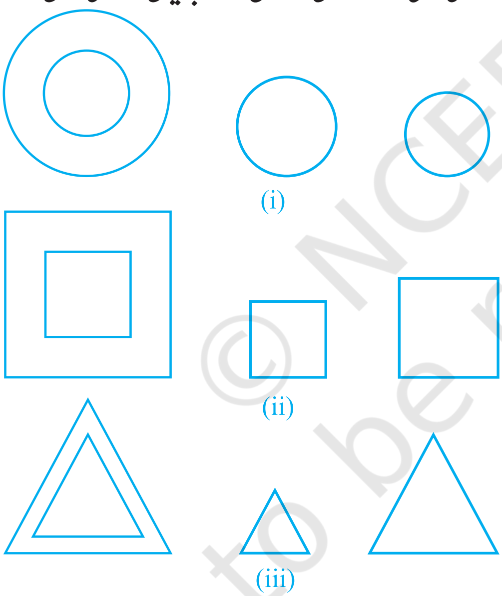
کیا آپ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ پہاڑوں (جیسے ماؤنٹ ایوریسٹ) کی اونچائی بتائی یا ایسی اشیا کے فاصلے جو کافی دوری پر واقع ہیں (جیسے چاند) کس طرح معلوم کئے جاتے ہیں؟ کیا آپ سوچ سکتے ہیں کہ ان کو کسی ناپنے والے ٹیپ سے سیدھا ناپا جا سکتا ہے؟ درحقیقت ایسی تمام اونچائیاں اور فاصلہ پیمائش کے غیر درست طریقے سے معلوم کئے جاتے ہیں، جس کی بنیاد اشکال کی مشابہت کے اصول پر ہے (مشق 6.3 کی مثال 7) سوال نمبر 15 اور اسی کتاب کا باب نمبر 8 اور 9 دیکھیے)

6.2 مشابہ اشکال

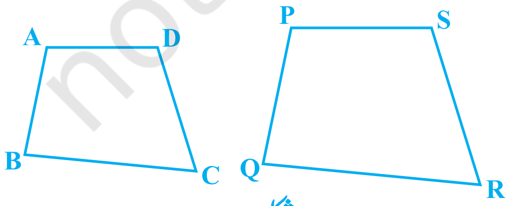
نویں جماعت میں آپ نے دیکھا کہ تمام دائرے جن کے نصف قطر برابر ہوں متماثل ہوتے ہیں۔ تمام مربعے جن کے اضلاع کی لمبائیاں مساوی ہوں متماثل ہوتے ہیں اور تمام مساوی ضلعی مثلث جس کے ضلع کے لمبائیاں مساوی ہوں متماثل ہوتے ہیں۔

اب دو یا دو سے زیادہ دائروں پر غور کیجیے (شکل 6(i) کو دیکھئے) کیا یہ متماثل نہیں ہیں؟ نوٹ کیجئے کہ کچھ متماثل ہیں اور کچھ نہیں لیکن تمام دائروں کی شکل ایک سی ہے ضروری نہیں ہے کے سائز بھی ایک سے ہوں اس لئے تمام دائرے مشابہ ہوتے ہیں۔ دو (یا دو سے زیادہ) مربعے یا (دو یا دو سے زیادہ) مساوی ضلعی مثلثوں کے بارے میں کیا خیال ہے [شکل 6.1 (ii) اور (iii) کو دیکھیے]؟ جیسا ہم نے دائروں کے سلسلہ میں مشاہدہ کیا تھا یہاں بھی تمام مربعے اور تمام مساوی ضلعی مثلث مشابہ ہیں۔

مذکورہ بالا باتوں سے ہم یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ تمام متماثل اشکال مشابہ ہوتی ہیں لیکن مشابہ اشکال ضروری نہیں کہ مشابہ ہوں۔

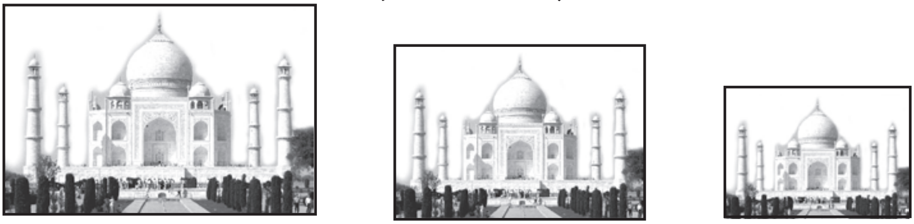


شکل 6.1



شکل 6.2

کیا ایک دائرہ اور مربع مشابہ ہوسکتا ہے؟ کیا ایک مثلث اور مربع مشابہ ہوسکتا ہے؟ ان سوالوں کا جواب ہم صرف اشکال کو دیکھ کر دے سکتے ہیں (اشکال 6.1 دیکھئے) یقینی طور پر یہ اشکال مشابہ نہیں ہے (کیوں؟)



شکل 6.3

دو چار ضلعی ABCD اور PQRS کے بارے میں آپ کہہ سکتے ہیں؟ (شکل 6.2 دیکھئے) کیا یہ مشابہ ہیں۔ یہ اشکال بظاہر تو مشابہ نظر آتی ہیں لیکن ضروری نہیں ہے کہ یہ مشابہ ہوں۔ اس لئے ہمارے پاس اشکال کی مشابہت کی کوئی تعریف ہونی چاہیے تاکہ اس تعریف اور کچھ اصولوں کی بنیاد پر ہم یہ طے کرسکیں کہ دو دی ہوئی اشکال مشابہ ہیں یا نہیں۔ ان کے لئے شکل 6.3 میں دئے گئے فوٹوگراف کو غور سے دیکھیے۔

آپ اس کو دیکھ کر فوراً کہہ سکتے ہیں کہ یہ ایک یادگار (تاج محل) کے فوٹوگراف ہیں۔ لیکن ان کے سائز مختلف ہیں، کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ یہ تینوں فوٹوگراف مشابہ ہیں؟ ہاں یہ ہیں۔

آپ ایک ہی شخص کے 10 سال کی عمر میں لئے گئے ایک فوٹوگراف اور 40 سال کی عمر میں لئے گئے اس ہی سائز کے فوٹوگراف کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ کیا یہ دونوں فوٹوگراف مشابہ ہیں؟ یہ دونوں فوٹوگراف ایک ہی سائز کے ہیں لیکن یقیناً ان کی شکل (Shape) ایک سی نہیں ہے۔ اس لئے یہ مشابہ نہیں ہیں۔

ایک فوٹوگراف جب ایک ہی Negative سے مختلف سائز کے فوٹوگراف کے پرنٹ نکالتا ہے تو وہ کیا کرتا ہے؟ آپ نے اسٹیمپ سائز، پاسپورٹ سائز اور پوسٹ کارڈ سائز کے فوٹوگراف کے بارے میں سنا ہے۔ عموی طور پر وہ ایک چھوٹے سائز کی فلم پر فوٹوگراف لیتا ہے، جیسے 35 ملی میٹر کا سائز، اور پھر اس کو بڑے سائز میں تبدیل کردیتا ہے یعنی 45 ملی میٹر (یا 55 ملی میٹر)۔ اس طرح سے اگر ہم کسی قطع خط کے ایک چھوٹا فوٹوگراف (شکل)، پر غور کریں اور اس کا نظیری قطع خط بڑے فوٹوگراف میں (شکل) اس قطع خط کا $\frac{45}{35}$ (یا $\frac{55}{35}$) ہوگا۔

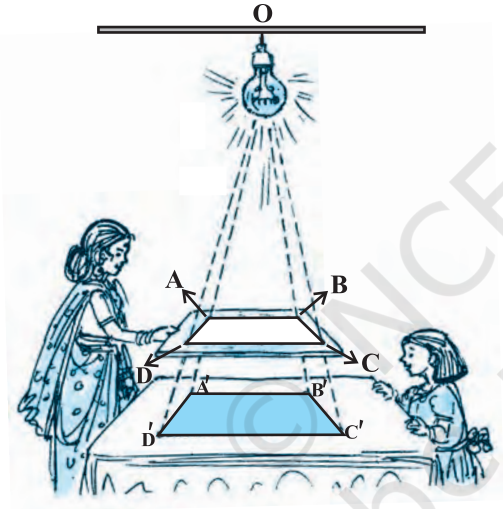
اس کا مطلب یہ ہوا کہ چھوٹے فوٹوگراف کا ہر قطع خط 35:45 (یا 35:55) کی نسبت میں بڑھا دیا گیا ہے۔ یہ بھی کہا جاسکتا ہے کہ بڑے فوٹوگراف کا ہر قطع خط 45:35 (یا 55:35) کی نسبت میں کم کردیا گیا۔ یہ مزید اگر آپ مختلف سائزوں والے دو فوٹوگراف کے نظیری قطعات خط کے جوڑوں کے درمیان جھکاؤ (یا زاویوں) پر غور کریں۔ تو آپ دیکھیں گے کہ یہ جھکاؤ (یا

زاویہ) ہمیشہ برابر ہوں گے۔ یہ دو اشکال خاص طور سے دو کثیر ضلعی کی مشابہت کی ضروری شرط ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ:

دو کثیر ضلعی جن کے اضلاع کی تعداد یکساں ہو، مشابہ ہوتے ہیں اگر (i) ان کے نظیری زاویہ مساوی ہوں اور (ii) ان کے نظیری اضلاع کی نسبت یکساں ہوں (یا متناسب ہوں)۔

نوٹ کیجئے کہ نظیری اضلاع کی یکساں نسبت کا مطلب ہے کثیر ضلعی کا Scale factor (یا ظاہر کرنے والی کسر) آپ نے ضرور سنا ہوگا کے دنیا کے نقشہ (یا global maps) اور بلڈنگوں کی تعمیر کے لئے Blue Print کو مناسب Scale factor اور مخصوص روائج (Conventions) کو ذہن میں رکھتے ہوئے بنائے جاتے ہیں۔

واضح طور پر اشکال کی مشابہت کو سمجھنے کے لئے ہم مندرجہ ذیل مشغلہ انجام دیتے ہیں۔



شکل 6.4

سرگرمی 1: اپنے کلاس روم کی چھت کے ایک نقطہ O پر ایک جلتا ہوا بلب لگائیں اور اس کے ٹھیک نیچے ایک میز رکھیں۔ ایک کثیر ضلعی، مان لیجئے ایک چار ضلعی ABCD ایک گتّے سے کاٹ کر زمین کے متوازی اس بلب اور میز کے درمیان رکھیں۔ تب ABCD کی پرچھائیں میز پر پڑے گی۔ اس پرچھائی کی Outline کو A'B'C'D' مارک کیجئے (شکل 6.4 دیکھیے)۔

نوٹ کیجئے کہ چار ضلعی A'B'C'D'، چار ضلعی ABCD کی بڑھی ہوئی شکل ہے۔ یہ روشنی کی خصوصیت کی وجہ سے ہے کیونکہ روشنی ہمیشہ ایک خط مستقیم میں چلتی ہے۔ آپ یہ بھی نوٹ کر سکتے ہیں A' کرن OA پر، B' کرن OB پر اور C'، OC پر اور D'، OD پر واقع ہے۔ اس لئے چار ضلعی A'B'C'D' اور ABCD ایک ہی شکل اور مختلف سائز کے ہیں۔

اس لئے چار ضلعی A'B'C'D' چار ضلعی ABCD کے مشابہ ہیں۔ ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ چار ضلعی ABCD چار ضلعی A'B'C'D' کے مشابہ ہیں۔

یہاں آپ یہ بھی نوٹ کر سکتے ہیں کہ راس A'، راس A کا نظیر راس ہے راس B'، B کا اور C'، C کا D'، D کا نظیری راس ہے۔ علامتی طور پر اس مطابقت کو ہم ظاہر کر سکتے ہیں A'↔ A، B' ↔ B، C' ↔ C، اور D' ↔ D کا نظیری راس ہے۔

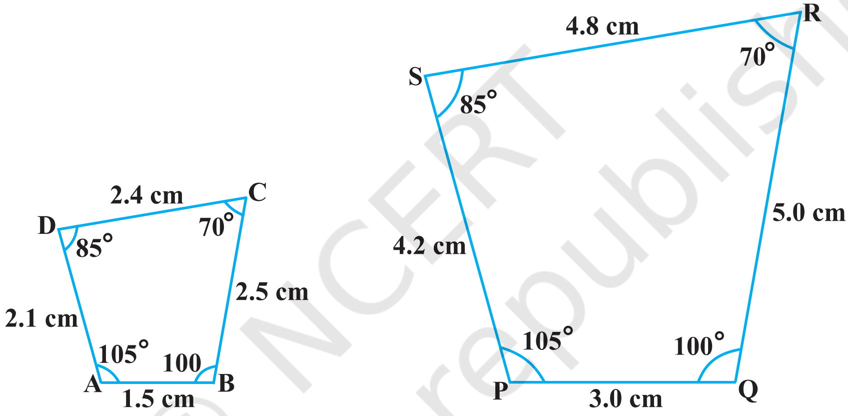
درحقیقت دونوں چار ضلعی کے زاویوں اور اضلاع کی پیمائش سے آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ

$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C', \angle D = \angle D'$ (i) اور

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'} \text{ (ii)}$$

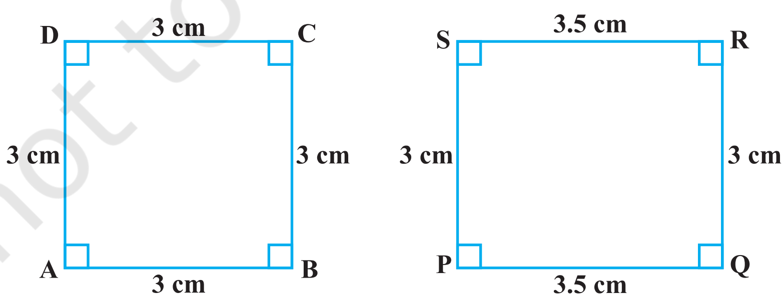
اس سے اس بات کو مزید تقویت ملتی ہے کہ دو کثیر ضلعی جن کے اضلاع کی تعداد یکساں ہے۔ مشابہ ہوں گے اگر (i) تمام نظیری زاویہ برابر ہو (ii) تمام نظیری اضلاع ایک ہی نسبت میں ہو (یا متناسب ہوں)

مذکورہ بالا بیان کی رو سے آپ آسانی سے یہ کہہ سکتے ہیں کہ چار ضلعی ABCD اور PQRS مشابہ ہیں شکل 6.5 دیکھیے۔



شکل 6.5

ریمارک: آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ اگر ایک کثیر ضلعی دوسری کثیر ضلعی کے مشابہ ہے اور دوسرا کثیر ضلعی تیسرے کثیر ضلعی

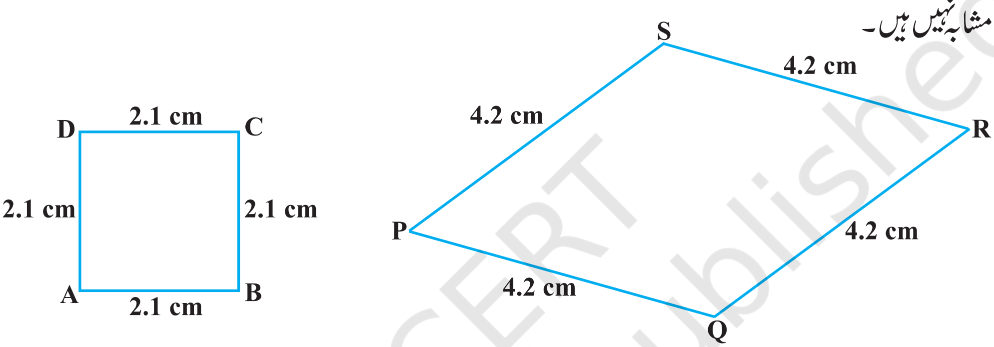


شکل 6.6

کے مشابہ ہے تو پہلا کثیر ضلعی تیسرے کے مشابہ ہوگی۔

آپ نوٹ کر سکتے ہیں کہ دو چار ضلعی کے (مربع اور مستطیل) شکل 6.6 میں نظیری زاویہ برابر ہیں لیکن ان کے نظیری اضلاع ایک ہی نسبت میں نہیں ہیں۔

اس لئے دو چار ضلعی مشابہ نہیں ہیں اسی طرح سے آپ نوٹ کر سکتے ہیں کہ شکل 6.7 کے دو چار ضلعی (مربع اور مستطیل) میں نظیر اضلاع ایک ہی نسبت میں ہیں (لیکن ان کے نظیری زاویہ برابر نہیں ہیں اس لئے یہ دونوں چار ضلعی (کثیر ضلعی) کے مشابہ نہیں ہیں۔



شکل 6.7

اس طرح سے مندرجہ بالا میں مشابہت کی کوئی سی بھی دو شرطیں (i)اور(ii)ان کی مشابہت کے لئے کافی نہیں ہیں۔

مشق 6.1

1۔ بریکٹ میں دئے گئے صحیح الفاظ سے مندرجہ ذیل خالی جگہوں کو پر کیجیے۔

(i) تمام دائرے ـــــ (متماثل، مشابہ) ہوتے ہیں۔

(ii) تمام مربعے ـــــ ہوتے ہیں (متماثل، مشابہ)

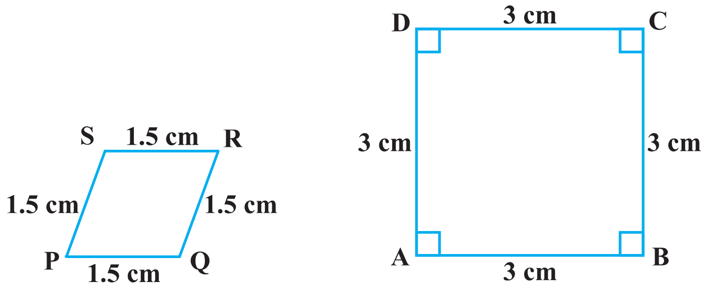
(iii) تمام ـــــ مثلث مشابہ ہوتے ہیں (مساوی الساقین، مساوی ضلعی)

(iv) دو کثیر ضلعی جن کے اضلاع کی تعداد یکساں ہے۔ مشابہ ہوں گی اگر (a) ان کے نظیری زاویہ ـــــ ہوں اور (b) ان کے نظیری ضلع ـــــ ہیں (مساوی، متناسب)

2۔ دو مختلف مثالیں دیجئے۔

(i) مشابہ اشکال کے جوڑوں کی (ii) غیر مشابہ اشکال کے جوڑوں کی

3۔ بیان کیجئے کہ مندرجہ ذیل چار ضلعی مشابہ ہیں یا نہیں:



شکل 6.8

6.3 مثلثوں کی مشابہت

آپ دو مثلثوں کی مشابہت کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

آپ دہرا سکتے ہیں کہ مثلث بھی ایک کثیر ضلعی ہے اس لئے ہم مثلثوں کی مشابہت کے لئے بھی وہی شرطیں بیان کر سکتے ہیں جو ہیں:

دو مثلث مشابہ ہیں اگر

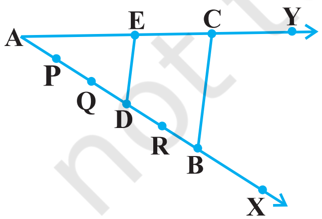
(i) ان کے نظیری زاویہ برابر ہوں

(ii) ان کے نظیر اضلاع کی نسبت برابر ہو (متناسب ہوں)

تھیلیز
(640 – 546 قبل مسیح)

ایک مشہور یونانی ریاضی داں نے دو مساوی زاوی مثلث سے متعلق ایک اہم حقیقت سے آگاہ کیا ہے دو مساوی زاوی مثلثوں کے نظیری اضلاع کی نسبت ہمیشہ برابر ہوتی ہے۔ ایسا مانا جاتا ہے کہ اس نے ایک نتیجہ جو تناسب کا بنیادی مسئلہ (جواب تھیلز کا مسئلہ جانا جاتا ہے) کا استعمال کیا جاتا ہے۔

تناسب کے بنیادی مسئلے کو سمجھنے کے لئے ہم اسے ایک عملی کام کریں



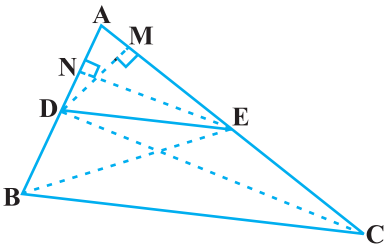
شکل 6.9

عملی کام (سرگرمی) 2: کوئی زاویہ XAY بنایئے اور اس کے ایک بازو AX پر نقاط (مان لیجئے 5 نقطے) P,Q,D,R, اور اس طرح سے مارک کریں کے AP = PQ = QD = DR = RB اب B سے گذرتا ہوا کوئی خط جو بازو

AY کو C پر قطع کرتا ہے کھینچیے (شکل 6.9 دیکھیے)

اور D سے گذرتا ہوا بھی ایک کھینچیے جو BC کے متوازی ہو اور A اور C کو E پر قطع کرے۔ کیا آپ اپنی بناوٹ سے مشاہدہ کرتے ہیں کہ $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$؟ AE اور EC کی پیائش کیجیے۔ $\frac{AE}{EC}$ کے بارے میں کیا خیال ہے؟ مشاہدہ کیجیے کہ $\frac{AE}{EC}$ بھی $\frac{3}{2}$ کے مساوی ہے۔ اس طرح سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ΔABC میں $DE \parallel BC$ اور $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$ کیا یہ ایک اتفاق ہے؟ نہیں یہ مندرجہ ذیل مسئلے کی وجہ سے ہے (جو تناسب کا بنیادی مسئلہ کہلاتا ہے)۔

مسئلہ 6.1: اگر مثلث کے ایک ضلع کے متوازی کوئی خط کھینچا جائے تو وہ باقی دو اضلاع کو مختلف نقطوں پر قطع کرتا ہے اور وہ دو اضلاع ایک ہی نسبت میں منقسم ہوتے ہیں۔



شکل 6.10

ثبوت: ہمیں مثلث ABC دیا ہوا ہے جس میں ایک خط BC کے متوازی ہے جو باقی دو اضلاع AB اور AC کو بالترتیب D اور E پر قطع کرتا ہے (شکل 6.10 دیکھیے)

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

آیئے BE اور CD کو ملائیں اور پھر $DM \perp AC$ اور $EN \perp AB$۔ کھینچیں۔

اب ΔADE کا رقبہ $= (\frac{1}{2}$ قاعدہ × اونچائی$) = \frac{1}{2} \times AD \times EN$

یاد کیجیے کہ آپ نے نویں کلاس میں پڑھا تھا کہ ΔADE کے رقبہ کو ہم ar(ADE) سے ظاہر کرتے ہیں۔

اس لئے $$ar(ADE) = \frac{1}{2}\, AD \times EN$$

اسی طرح سے $$ar(BDE) = \frac{1}{2}\, DB \times EN$$

$$ar(ADE) = \frac{1}{2}\, AE \times DM \quad \text{اور} \quad ar(DEC) = \frac{1}{2}\, EC \times DM$$

اس لئے $$\frac{ar(ADE)}{ar(BDE)} = \frac{\frac{1}{2}\, AD \times EN}{\frac{1}{2}\, DB \times EN} = \frac{AD}{DB} \qquad (1)$$

اور $$\frac{ar(ADE)}{ar(DEC)}=\frac{\frac{1}{2}AE\times DM}{\frac{1}{2}EC\times DM}=\frac{AE}{EC} \qquad (2)$$

نوٹ کیجیے کہ ΔBDE اور DEC ایک قاعدہ DE اور متوازی خطوط BC اور DE کے درمیان میں ہے۔

اس لئے $$ar(BDE)=ar(DEC) \qquad (3)$$

اس لئے (1) اور (2) اور (3) ہمیں ملتا ہے

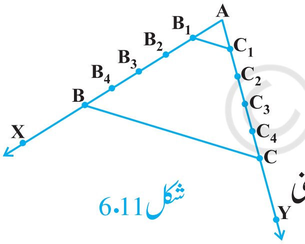
$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

کیا اس مسئلے کا معکوس بھی درست ہے (معکوس کے مفہوم کے لئے ضمیمہ 1 دیکھئے) اس کی جانچ کرنے کے لئے آیئے مندرجہ ذیل مشغلہ کرتے ہیں

سرگرمی 3: اپنی کاپی پر ایک زاویہ XAY بنایئے اور شعاع AX پر نقطے B_1, B_2, B_3, B_4 اور B مارک کیجیے

$$AB_1=B_1B_2=B_2B_3=B_3B_4=B_4B$$

اسی طرح سے شعاع AY پر نقطے C_1, C_2, C_3, C_4 مارک کیجیے جبکہ $AC_1=C_1C_2=C_2C_3=C_3C_4=C_4C$ تب B_1C_1 اور BC کو ملایئے (شکل 6.11 دیکھیے)۔



شکل 6.11

نوٹ کیجیے کہ $$\frac{AB_1}{B_1B}=\frac{AC_1}{C_1C}\ \left(\text{ہر ایک } \frac{1}{4} \text{ کے برابر ہے}\right)$$

آپ یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ خطوط B_1C_1 اور BC ایک دوسرے کے متوازی ہیں یعنی

$$B_1C_1 \parallel BC \qquad (1)$$

اسی طرح سے B_2C_2, B_3C_3 اور B_4C_4 کو ملانے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$\frac{AB_2}{B_2B}=\frac{AC_2}{C_2C}\left(=\frac{2}{3}\right) \text{ اور } B_2C_2 \parallel BC \qquad (2)$$

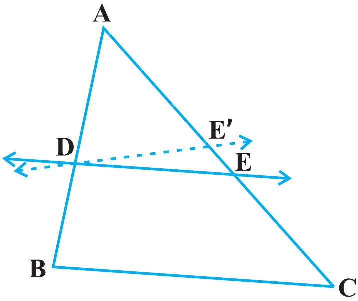
$$\frac{AB_3}{B_3B}=\frac{AC_3}{C_3C}\left(=\frac{3}{2}\right) \text{ اور } B_3C_3 \parallel BC \qquad (3)$$

$$\frac{AB_4}{B_4B}=\frac{AC_4}{C_4C}\left(=\frac{4}{1}\right) \text{ اور } B_4C_4 \parallel BC \qquad (4)$$

(1)،(2)،(3)،اور (4) یہ مشاہدہ کیا جا سکتا ہے کہ اگر ایک خط مثلث کے دو اضلاع کو ایک نسبت میں منقسم کرتا ہے تب خط تیسرے اضلاع کے متوازی ہوگا۔

اس مشغلے کو ہم کو ایک ایسے زاویہ XAY بنا کر دہرا سکتے ہیں جن کی پیمائش مختلف ہے اور اس کے بازو AX اور AY کے مساوی حصہ بنے ہوں۔ ہر مرتبہ آپ کو ایک ہی نتیجہ ملے گا۔ اس طرح سے ہمیں مندرجہ ذیل مسئلہ حاصل ہوگا جو مسئلہ 6.1 کا معکوس ہے۔

مسئلہ 6.2: اگر ایک خط مثلث کسی دو اضلاع کو یکساں نسبت میں تقسیم کرتا ہے، تب یہ خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوگا۔



شکل 6.12

اس مسئلے کو ہم اس طرح سے ثابت کر سکتے ہیں، ایک DE اس طرح لیجیے کہ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ اور یہ فرض کرتے ہوئے کہ DE، BC کے متوازی نہیں ہے۔ (شکل 6.12 دیکھیے)

اگر DE، BC کے متوازی نہیں ہے، تو DE'، BC کے متوازی کیجیے۔

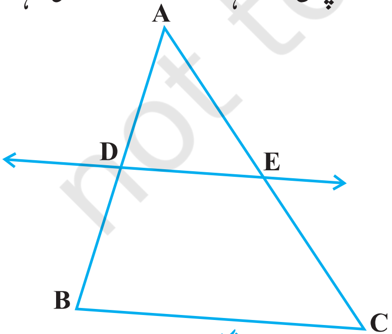
اس لئے $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (کیوں؟)

اس لئے $\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (کیوں؟)

مذکورہ بالا مساوات میں دونوں طرف 1 جمع کرنے پر آپ دیکھ سکتے ہیں اور E اور E' منطبق ہیں (کیوں؟)

مذکورہ بالا مسئلوں کی مزید وضاحت کے لئے آیئے کچھ مثالوں کو لیتے ہیں۔

مثال 1: اگر ایک خط مثلث ABC کے اضلاع AB اور AC کو بالترتیب D اور E پر قطع کرتا ہے۔ اور BC کے متوازی ہے تو ثابت کیجئے کہ $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$ (شکل 6.13 دیکھیے)

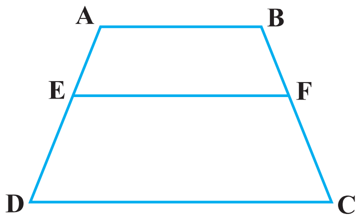


شکل 6.13

حل: DE ∥ BC دیا ہوا ہے

اس لئے $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (مسئلہ 6.1)

یا $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$



شکل 6.14

یا $$\frac{DB}{AD}+1=\frac{EC}{AE}+1$$

یا $$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$$

اس لئے $$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

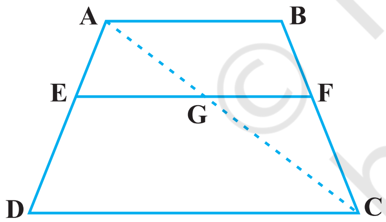
مثال 2: ABCD ایک منحرف ہے جس میں AB || DC، E اور F دو غیرمتوازی اضلاع بالترتیب AD اور BC پر نقطے ہیں جب کہ EF || AB (شکل 6.14 دیکھیے)

دکھائیے کہ $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$

حل: آیئے AC کو ملائیں جو EF کو G پر قطع کرے (شکل 6.15 دیکھئے)

AB || DC اور EF || AB (دیا ہوا ہے)

اس لئے EF || DC (خطوط جو ایک ہی خط کے متوازی ہوں آپس میں بھی متوازی ہوں گے۔



شکل 6.15

اب، Δ ADC میں

EG || DC (کیونکہ EF || DC)

اس لئے $\frac{AE}{ED}=\frac{AG}{GC}$ (مسئلہ 6.1) (1)

اسی طرح Δ CAB سے

$$\frac{CG}{AG}=\frac{CF}{BF}$$

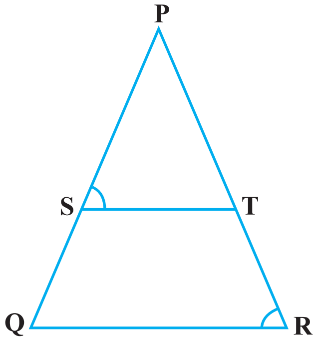
یعنی $\frac{AG}{GC}=\frac{BF}{FC}$ (2)

اس لئے (1) اور (2) سے

$$\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$$

مثال 3: شکل 6.16 میں $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ اور $\angle PST = \angle PRQ$

ثابت کیجئے کہ PQR ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔



شکل 6.16

حل: یہ دیا ہوا ہے کہ $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$.

اس لئے $ST \parallel QR$ (مسئلہ 6.2)

اس لئے $\angle PST = \angle PQR$ (نظیری زاویہ) (1)

مزید یہ دیا ہوا ہے کہ

$\angle PST = \angle PRQ$

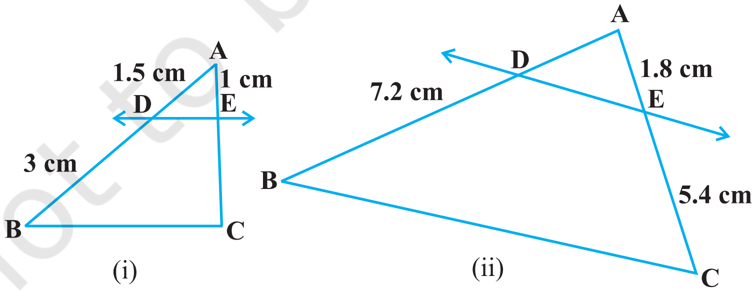
اس لئے $\angle PRQ = \angle PQR$ (1 اور 2 سے)

اس لئے $PQ = PR$ (مساوی زاویوں کے سامنے کے ضلع)

یعنی PQR ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔

مشق 6.2

1۔ شکل 6.17 (i) اور (ii) میں $DE \parallel BC$۔ (i) میں EC اور (ii) میں AD معلوم کیجیے۔



شکل 6.17

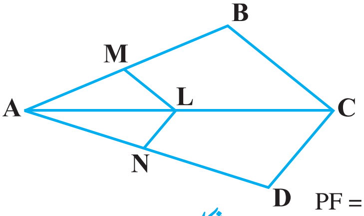
2۔ E اور F بالترتیب مثلث PQR کے اضلاع PQ اور PR پر دو نقطے ہیں۔ مندرجہ ذیل ہر ایک حالت کے لئے بیان کیجیے

کہ EF || QR

(i) PE = 3.9 cm, EQ = 3 cm, PF = 3.6 cm اور FR = 2.4 cm

(ii) PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8 cm اور RF = 9 cm

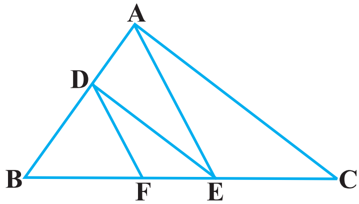
(iii) PQ = 1.28 cm, PR = 2.56 cm, PE = 0.18 cm اور PF = 0.36 cm



شکل 6.18

3۔ شکل 6.18 میں اگر LM || CB اور LN || CD ثابت کیجیے کہ

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}.$$

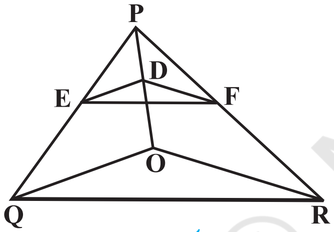


شکل 6.19

4۔ 6.19 میں DE || AC اور DF || AE ثابت کیجیے کہ

$$\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}.$$

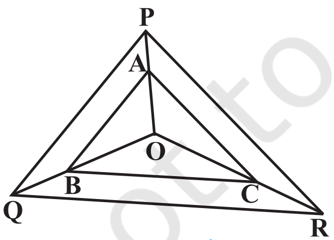
5۔ شکل 6.20 میں DE || OQ اور DF || OR دکھائیے کہ EF || QR



شکل 6.20

6۔ شکل 6.21 میں A, B اور C بالترتیب OP, OQ اور OR پر نقطے ہیں جب کہ AB || PQ اور AC || PR دکھائیے کہ BC || QR۔

7۔ مسئلہ 6.1 کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے گذرنے والا خط دوسرے ضلع کے متوازی ہو تو وہ تیسرے ضلع کی تنصیف کرے گا ۔(یاد کیجیے کہ آپ اس کو نویں جماعت میں ثابت کر چکے ہیں)



شکل 6.21

8۔ مسئلہ 6.2 کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے کہ مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملانے والا خط تیسرے اضلاع کے متوازی ہوتا ہے (یاد کیجیۓ کہ آپ اس کونویں جماعت میں ثابت کر چکے ہیں)

9۔ ABCD ایک منحرف ہے جس میں AB || DC اور اس کے وتر ایک دوسرے نقطہ O پر قطع کرتے ہیں دکھائیے کہ $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$.

10۔ ایک چار ضلعی ABCD کے وتر ایک دوسرے نقطہ O پر قطع کرتے ہیں جب کہ $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$. دکھائیے کہ چار ضلعی

ABCD ایک منحرف ہے۔

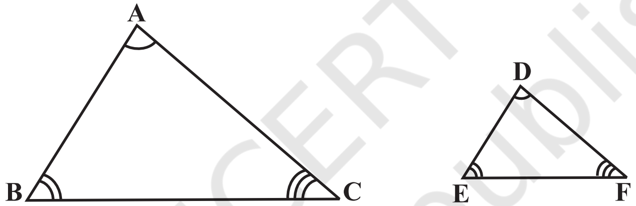
6.4 مثلثوں کی مشابہت کی شرطیں

پچھلے سیکشن میں ہم نے بیان کیا کہ دو مثلث مشابہ ہوتے ہیں اگر (i) ان کے نظیری زاویہ برابر ہوں (ii) ان کے نظیری اضلاع کی نسبت برابر (متناسب ہوں) ہو۔

یعنی Δ ABC اور Δ DEF میں اگر

(i) $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ اور

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$, تب دو مثلث مشابہ ہوں گے (شکل 6.22 دیکھیے)



شکل 6.22

یہاں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ A کا نظیری D, B کا نظیری E اور C کا نظیری F ہے۔ علامتی طور پر ہم ان دو مثلثوں کی مشابہت کو 'Δ ABC $\sim \Delta$ DEF' لکھتے ہیں اور پڑھتے ہیں کہ مثلث ABC مثلث DEF کے مشابہ ہے۔ علامت '~' کے مشابہ ہیں، کو ظاہر کرتی ہے، یاد کیجیے آپ نے نویں کلاس میں علامت '$\cong$' کو متماثل ہے، کے لیے استعمال کیا تھا۔

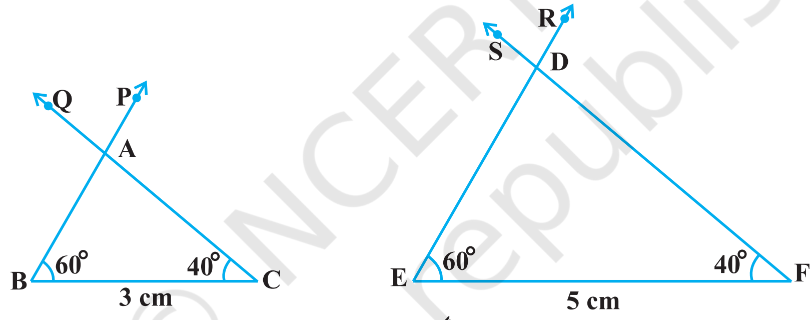
> اس کو ضرور یاد رکھنا چاہیے کہ جیسے کے دو مثلثوں کی متماثلت میں کیا گیا، مثلثوں کی مشابہت کو بھی علامتی طور پر ظاہر کیا جائے۔ ان کے راسوں کی صحیح مطابقت کو استعمال کرے۔ مثال کے طور پر شکل 6.22 کے مثلثوں ABC اور DFE کے لئے ہم $\Delta ABC \sim \Delta EDF$ یا $\Delta ABC \sim \Delta FED$ نہیں لکھ سکتے ہیں۔ لیکن ہم $\Delta BAC \sim \Delta EDF$ لکھ سکتے ہیں۔

اب قدرتی طور پر یہ سوال پیدا ہوتا ہے: دو مثلثوں ABC اور DEF کی مشابہت کی جانچ کرنے کے لیے، کیا ہم ہمیشہ ان کے نظیری زاویوں کی برابری $(\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F)$ اور ان کے نظیری اضلاع کی نسبت کی برابری $\left(\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}\right)$ پر غور کرتے ہیں؟ آیئے جانچ کرتے ہیں۔ یاد کیجیے کہ آپ نے نویں کلاس میں دو مثلثوں کی

کی متماثلت سے متعلق کچھ شرطیں حاصل کی تھیں، جن میں صرف تین نظیر حصوں کے جوڑے ملوث کیجئے۔ یہاں بھی آیئے ہم ایک کوشش کریں دو مثلثوں کی مشابہت کی شرطیں حاصل کرنے کی جس میں دو مثلثوں کے نظیری حصوں کے چھ جوڑوں کے بجائے کم نظیری حصوں کے جوڑوں کا استعمال کر کے مثلثوں کو مشابہ ثابت کر دیں۔ اس کے لیے ہم مندرجہ ذیل سرگرمی (عملی کام) کرتے ہیں۔

سرگرمی 4: دو مختلف لمبائیوں، مان لیجئے 3 سینٹی میٹر اور 5 سینٹی میٹر، والے قطعات خط بالترتیب BC اور EF کھینچیں۔ تب نقطہ B اور C پر بالترتیب زاویہ PBC اور QCB بنایئے جن کی پیمائش مان لیجئے 60° اور 40° ہو۔ مزید نقطہ E اور F پر بالترتیب زاویہ REF اور SEF، 60° اور 40° کے بنائیں۔ (شکل 6.23 دیکھیے)

مان لیجئے شعائیں BP اور CQ ایک دوسرے کو A پر اور ER اور FS ایک دوسرے کو D پر قطع کریں دو مثلثوں

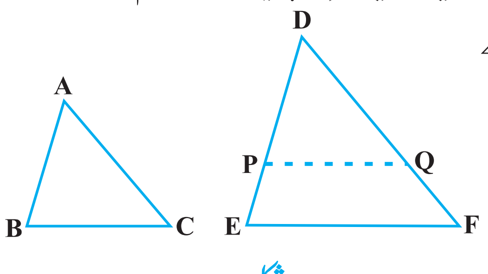


شکل 6.23

ABC اور DEF میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ اور $\angle A = \angle D$ بھی ان دونوں مثلثوں کے نظیری زاویے برابر ہیں۔ آپ ان کے نظیری اضلاع کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ نوٹ کیجئے کہ $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{5} = 0.6$. ، $\frac{AB}{DE}$ اور $\frac{CA}{FD}$ کے بارے میں آپ کا خیال ہے AB, DE, CA اور FD کی پیمائش کرنے پر آپ پائیں گے کہ $\frac{AB}{DE}$ اور $\frac{CA}{FD}$ بھی 0.6 کے برابر ہیں (یا نزدیکی طور پر 0.6 کے قریب ہیں۔ اگر پیمائش میں کچھ غلطی ہوگئی ہو تو) اس طرح سے $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$. آپ اس عمل کو ایسے دوسرے بہت سے مثلثوں کے جوڑے بنا کر دہرا سکتے ہیں جن کے نظیری زاویے مساوی ہوں ہر مرتبہ آپ پائیں گے کہ ان کے نظیری اضلاع کی نسبت برابر ہے (یا متناسب ہیں) اس مشغلہ سے ہمیں دو مثلثوں کی مشابہت کی مندرجہ ذیل شرط حاصل ہوتی ہے۔

مسئلہ 6.3: اگر دو مثلثوں میں نظیری زاویہ برابر ہوں۔ تب ان کے نظیری اضلاع کی نسبت

برابر ہوتی ہے (یا متناسب) اور اس لئے دونوں مثلث مشابہ ہوں گے۔
اس مشابہت کی شرط کو ہم دو مثلثوں کی مشابہت AAA (زاویہ-زاویہ-زاویہ) شرط کہتے ہیں اس مسئلے کو ہم دو مثلثوں ABC اور DEF کو لے کر کر سکتے ہیں جب کہ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ اور $\angle C = \angle F$ (شکل 6.24 دیکھیے)



شکل 6.24

اگر DP = AB اور DQ = AC کاٹئے اور PQ ملایئے

اس لئے

$\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (کیوں؟)

اس سے حاصل ہوتا ہے $\angle B = \angle P = \angle E$ اور $PQ \parallel EF$ (کیسے؟)

اس لئے $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ (کیوں؟)

یعنی $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (کیوں؟)

اسی طرح سے، $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ اور اسی لئے $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

رائے زنی (ریمارک): اگر ایک مثلث کے دو زاویے دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے برابر ہوں تب مثلث کے زاویوں کی جمعی خصوصیت سے ان کا تیسرا زاویہ بھی مساوی ہوگا۔ اس لئے AAA مشابہت کی شرط کو ہم اس طرح بیان کر سکتے ہیں۔

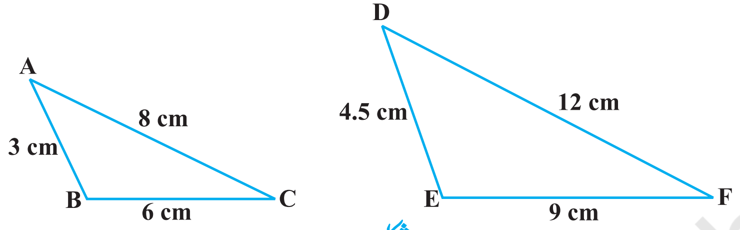
اگر ایک مثلث کے دو زاویے باالترتیب دوسرے مثلث کے دوزاویوں کے برابر ہوں تو دو مثلث مشابہ ہوتے ہیں۔

اس شرط کو ہم AA دو مثلث کی مشابہت کی شرط کہتے ہیں۔

اوپر آپ دیکھ چکے ہیں اگر کسی مثلث کے تین زاویہ باالترتیب دوسرے مثلث کے تین زاویوں کے برابر ہیں تو ان کے نظیری اضلاع متناسب ہوں گے (یا ان کی نسبت برابر ہوگی) اس بیان کے معکوس کے بارے میں کیا خیال ہے؟ کیا اس کا معکوس درست ہے؟ دوسرے لفظوں میں اگر ایک مثلث کے اضلاع باالترتیب دوسرے مثلث کے اضلاع کے متناسب ہیں، تو کیا یہ صحیح ہے کہ ان کے نظیری زاویہ بھی برابر ہوں؟ آیئے اس کو ایک مشغلے کے ذریعے جانچیں۔

سرگرمی 5: دو مثلث ABC اور DEF اس طرح بنائیں کہ 3 سینٹی میٹر $AB=3$، 6 سینٹی میٹر $BC=$ اور 8 سینٹی میٹر $CA=$، 4.5 سینٹی میٹر $DE=$ 9 سینٹی میٹر $EF=$ اور 12 سینٹی میٹر $FD=$ (شکل 6.25 دیکھیے)

اس لئے آپ کے پاس ہے $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}$ (ہر ایک $\frac{2}{3}$ کے برابر ہیں)



شکل 6.25

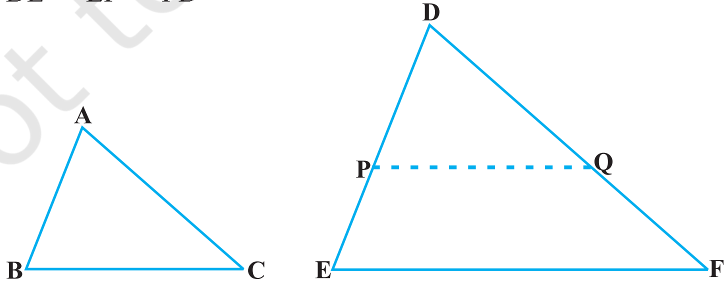
اب $\angle E, \angle D, \angle C, \angle B, \angle A$ اور $\angle F$ کی پیائش کیجئے آپ مشاہدہ کریں گے کہ $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ اور $\angle C = \angle F$ یعنی دونوں مثلثوں کے نظیری زاویے برابر ہیں۔

اس مشغلے کو آپ دوسرے اسی طرح کے مثلثوں کو بنا کر (جن کے اضلاع کی نسبت برابر ہو) دہرا سکتے ہیں۔ ہر مرتبہ آپ پائیں گے کہ ان کے نظیری زاویے برابر ہوں گے۔ یہ مثلثوں کی مشابہت کی مندرجہ ذیل شرط کی وجہ سے ہے۔

مسئلہ 6.4: اگر دو مثلثوں میں ،ایک مثلث کے اضلاع دوسرے مثلث کے اضلاع کے متناسب ہوں (یا ان کی نسبت برابرہو)تب ان کے نظیری زاویے برابر ہونگے اور اس طرح سے دونوں مثلث مشابہ ہوتے ہیں۔

دو مثلثوں کی مشابہت کی اس شرط کو ہم SSS (ضلع۔ضلع۔ضلع) شرط کہتے ہیں۔

اس مسئلے کو ہم دو مثلث ABC اور DEF لے کر ثابت کر سکتے ہیں جبکہ $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}$ (<1) شکل 6.26 دیکھیے:



شکل 6.26

DP = AB اور DQ = AC کاٹیے اور PQ کو ملایئے۔

یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ اور PQ ∥ EF (کیسے؟)

اس لئے $\angle P = \angle E$ اور $\angle Q = \angle F$

اس لئے $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$

اس لئے $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (کیوں؟)

اس لئے BC = PQ (کیوں؟)

اس طرح سے $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (کیوں؟)

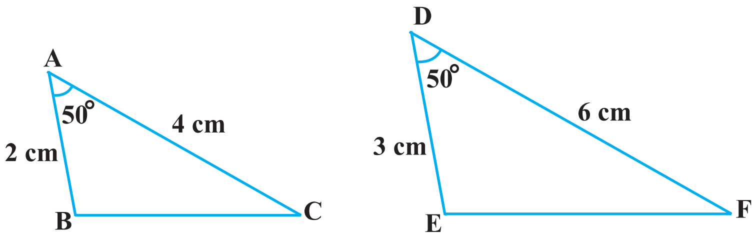
اس لئے $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ اور $\angle C = \angle F$ (کیسے؟)

ریمارک: آپ یاد کیجیے کہ دونوں شرطیں (i) نظیری زاویہ برابر ہیں (ii) نظیری اضلاع کی نسبت برابر ہے دو کثیر ضلعی کے مشابہ ہونے کے لئے کافی نہیں ہیں۔ لیکن مسئلہ 6.3 اور 6.4 کی بنیاد پر اب آپ کہہ سکتے ہیں کہ دو مثلثوں کی مشابہت کے سلسلے میں دونوں شرطوں کی جانچ کرنا ضروری نہیں ہے۔ ایک شرط دوسری شرط کو اپنے آپ پوری ہو جاتی ہے۔

آیئے اب نویں کلاس میں مثلثوں کی متماثلت کی مختلف شرطوں کو دہرایئے۔ آپ یہ مشاہدہ کریں گے کہ مشابہت کی SSS شرط کا موازنہ متماثلت کی SSS شرط سے کیا جاسکتا ہے۔ اس بات سے ہمیں تقویت ملتی ہے کہ ہم دیکھیں مثلثوں کی متماثلت کی SAS شرط کا موازنہ مشابہت کی شرط سے کیا جاسکتا ہے یا نہیں، اس کے لئے ہم مندرجہ ذیل عملی کام کرتے ہیں۔

سرگرمی 6: دو مثلث ABC اور DEF بنایئے جس میں سینٹی میٹر AB=2، $\angle A = 50^\circ$، AC = 4 سینٹی میٹر، DE = 3 سینٹی میٹر، $\angle D = 50^\circ$ اور DF = 6 سینٹی میٹر (شکل 6.27 دیکھیے)

یہاں آپ مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (ہر ایک $\frac{2}{3}$ کے برابر ہے) اور A (ضلع AB اور AC کے درمیان



شکل 6.27

بنا زاویہ) برابر ہے $\angle D$ (اضلاع DE اور DF کے درمیان بنے زاوایے) کے۔ یعنی مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے برابر ہے اور ان زاویوں کے حامل اضلاع کی نسبت برابر ہو (یعنی متناسب) آیئے اب $\angle B, \angle C, \angle E$ اور $\angle F$ کی پیمائش کیجیے۔

آپ پائیں گے کہ $\angle B = \angle E$ اور $\angle C = \angle F$ یعنی $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ اور $\angle C = \angle F$ اس لئے مشابہت کی AAA شرط کے مطابق $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF$۔ آپ اس مشغلے مثلثوں کے بہت سے ایسے جوڑے بنا کر کر سکتے ہیں جس میں مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے برابر ہو اور ان زاویوں کے حامل اضلاع کی نسبت برابر ہو (متناسب ہو)۔ ہر مرتبہ آپ پائیں گے کہ مثلث مشابہ ہیں یہ مثلثوں کی مشابہت کی مندرجہ ذیل شرط کی وجہ سے ہے۔

مسئلہ 6.5: اگر کسی مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاوایہ کے برابرہو اور ان زاویوں کے حامل اضلاع متناسب ہوں، تو دونوں مثلث مشابہ ہوں گے۔

اس شرط کو ہم مثلثوں کی مشابہت کی SAS (ضلع۔ زاویہ۔ ضلع) شرط سے جانتے ہیں۔

جیسا ہم نے پہلے کیا ہے، اس مسئلے کو بھی ہم دو مثلثوں ABC اور DEF لے کر ثابت کر سکتے ہیں جب کہ

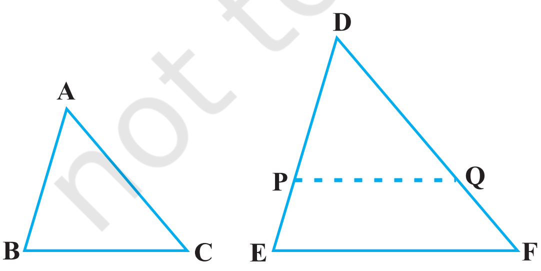
$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} (<1)$ اور $\angle A = \angle D$ (شکل 6.28)

دیکھیے) DP = AB، DQ = AC کاٹئے اور PQ ملایئے۔

اب $PQ \parallel EF$ اور $\Delta\, ABC \cong \Delta\, DPQ$ (کیسے؟)

اس لئے $\angle A = \angle D, \angle B = \angle P$ اور $\angle C = \angle Q$

اس لئے $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF$ (کیوں؟)

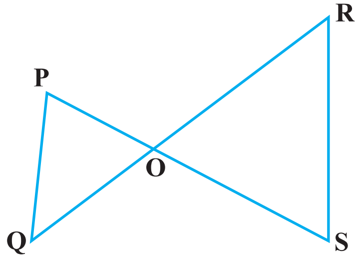


شکل 6.28

اس شرط کے استعمال کی مزید وضاحت کے لئے

ہم کچھ مثالیں لیتے ہیں

مثال 4: شکل 6.29 میں اگر PQ || RS ثابت کیجیے کہ $\Delta\ POQ \sim \Delta\ SOR$

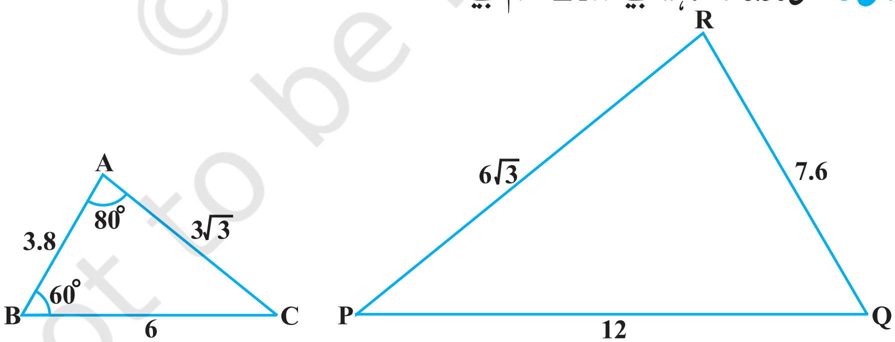


شکل 6.29

حل:

	PQ || RS	(دیا ہوا ہے)
اس لیے	$\angle P = \angle S$	(متبادل زاویہ)
اور	$\angle Q = \angle R$	
اس لیے	$\angle POQ = \angle SOR$	(بالمقابل زاویہ)
اس لیے	$\Delta\ POQ \sim \Delta\ SOR$	(AAA مشابہت کی شرط)

مثال 5: شکل 6.30 کا مشاہدہ کیجیے اور $\angle P$ معلوم کیجیے۔



شکل 6.30

حل: $\Delta\ ABC$ اور $\Delta\ PQR$ میں

$$\frac{CA}{PR} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \text{ اور } \frac{AB}{RQ} = \frac{3.8}{7.6} = \frac{1}{2}, \frac{BC}{QP} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

یعنی $\frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{CA}{PR}$

اس لیے $\Delta ABC \sim \Delta RQP$ (SSS مشابہت کی شرط)

اس لیے $\angle C = \angle P$ (مشابہ مثلثوں کے نظیری زاویہ)

لیکن $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$ (زاویوں کی جمعی خصوصیت)

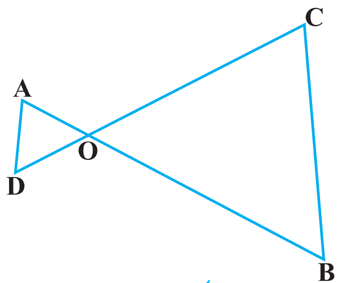
$= 180° - 80° - 60° = 40°$

اس لیے $\angle P = 40°$

مثال 6: شکل 6.31 میں

$OA \,.\, OB = OC \,.\, OD.$

دکھائیے کہ $\angle A = \angle C$ اور $\angle B = \angle D$



شکل 6.31

حل: $OA \,.\, OB = OC \,.\, OD$ (دیا ہوا ہے)

اس لیے $\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$ (1)

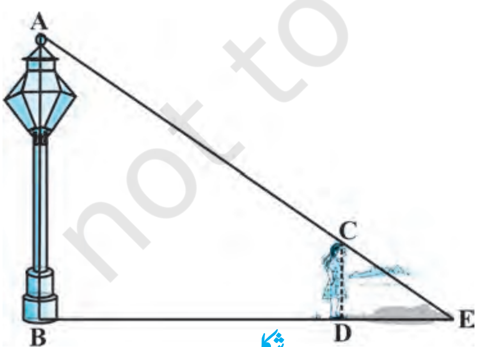
مزید ہمارے پاس ہے۔ $\angle AOD = \angle COB$

(بالمقابل زاویہ) (2)

اس لیے (1) اور (2) سے $\Delta AOD \sim \Delta COB$ (مشابہت کی SAS شرط)

اس لیے $\angle A = \angle C$ اور $\angle D = \angle B$ (مشابہ مثلثوں کے نظیری زاویہ)

مثال 7: 90 سینٹی میٹر قد کی ایک لڑکی 1.2 منٹ فی سیکنڈ کی رفتار سے ایک لیمپ پوسٹ کے قاعدہ سے دور جا رہی ہے۔ اگر لیمپ زمین سے 3.6 میٹر اونچائی پر واقع ہے تو 4 سیکنڈ بعد اس کی پرچھائی کی لمبائی معلوم کیجیے۔



شکل 6.32

حل: مانا AB لیمپ پوسٹ کو ظاہر کرتا ہے اور 4 سیکنڈ چلنے کے بعد CD لڑکی کو ظاہر کرتا ہے (شکل 6.32 دیکھیے) شکل میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ DE لڑکی کی پرچھائی ہے۔ مان لیجیے DF

x میٹر ہے۔

اب، $DB = 1.2$ میٹر $\times 4 = 4.8$ میٹر

نوٹ کیجیے ΔABE اور ΔCDE،

$\angle B = \angle D$ (ہر ایک 90° کا ہے کیونکہ لیمپ پوسٹ اور لڑکی دونوں زمین پر انتصابی طور پر کھڑے ہیں)

اور $\angle E = \angle E$ (یکساں)

$\Delta ABE \sim \Delta CDE$

اس لئے $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$

یعنی $\frac{4.8 + x}{x} = \frac{3.6}{0.9}$ $\left(90\text{cm} = \frac{90}{100}\text{ m} = 0.9\right)$

یعنی $4.8 + x = 4x$

یعنی $3x = 4.8$

یعنی $x = 1.6$

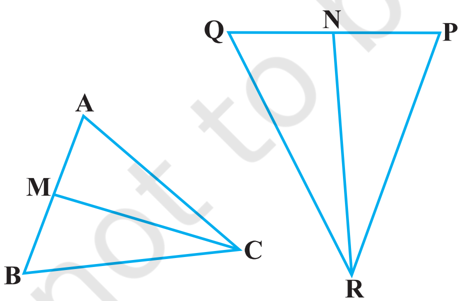
اس لئے 4 سیکنڈ چلنے کے بعد لڑکی کی پرچھائی کی لمبائی 1.6 میٹر

مثال 8: شکل 6.33 میں CM اور RN بالترتیب ΔABC اور ΔPQR کے وسطانیہ میں اگر $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ کو ثابت کیجئے کہ

(i) $\Delta AMC \sim \Delta PNR$

(ii) $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$

(iii) $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$



شکل 6.33

حل: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (i)

اس لئے $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ (1)

اور $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q$ اور $\angle C = \angle R$ (2)

لیکن $PQ = 2\,PN$ اور $AB = 2AM$ (کیونکہ CM اور RN وسطانیہ ہیں)

اس لئے (1) سے $\frac{2\,AM}{2\,PN} = \frac{CA}{RP}$

یعنی $\frac{AM}{PN} = \frac{CA}{RP}$ (3)

مزید $\angle MAC = \angle NPR$ (2 سے) (4)

اس لئے 3 اور 4 سے

$\Delta\, AMC \sim \Delta\, PNR$ (SAS مشابہت) (5)

(5)(ii) سے $\frac{CM}{RN} = \frac{CA}{RP}$ (6)

لیکن $\frac{CA}{RP} = \frac{AB}{PQ}$ ((1) سے) (7)

اس لئے $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$ [(6) اور (7) سے] (8)

(iii) دوبارہ $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ [(1) سے]

اس لئے $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR}$ [(8) سے] (9)

مزید $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ} = \frac{2\,BM}{2\,QN}$

یعنی $\frac{CM}{RN} = \frac{BM}{QN}$ (10)

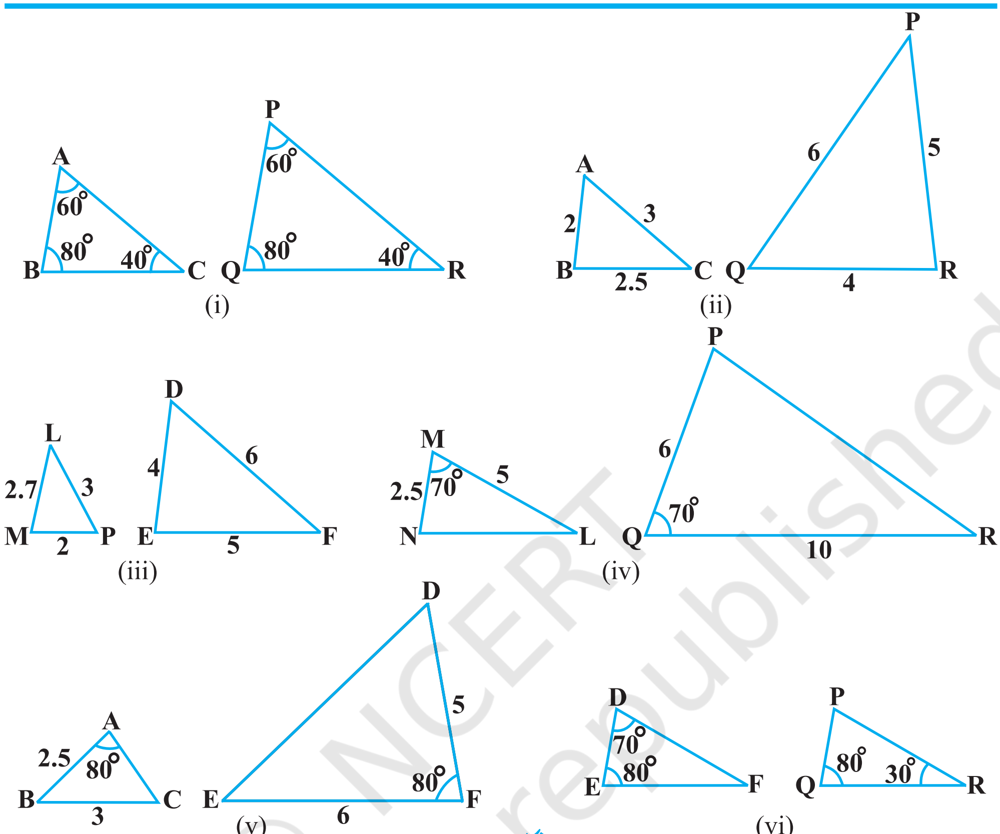
یعنی $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR} = \frac{BM}{QN}$ [(9) اور (10)]

اس لئے $\Delta\, CMB \quad \Delta\, RNQ$ (SSS مشابہت)

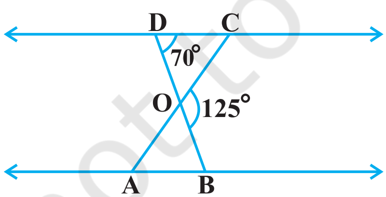
[نوٹ کیجئے: آپ (iii) کو اسی طریقہ سے ثابت کر سکتے ہیں جس سے (i) ثابت ہوا ہے۔

مشق 6.3

1۔ بیان کیجیے کہ شکل 6.34 میں کون سے مثلثوں کے جوڑے مشابہ ہیں۔ اس سوال کا جواب دینے کے لئے استعمال ہوئی مشابہت کی شرط لکھنے اور مشابہ مثلثوں کو علامتی شکل میں لکھیے۔



شکل 6.34



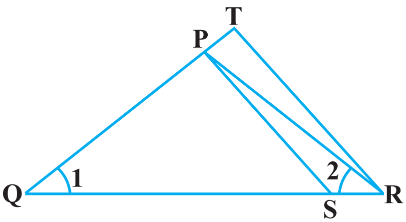
شکل 6.35

2۔ شکل 6.35 میں $\Delta OBA \sim \Delta ODC$، $\angle BOC = 125°$ اور $\angle CDO = 70°$، $\angle DOC$, $\angle DCO$ اور $\angle OAB$ معلوم کیجیے۔

3۔ ایک منحرف ABCD جس میں $AB \parallel DC$ کے وتر AC اور BD ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔ دو مثلثوں کی مشابہت کی شرط کو استعمال کرتے ہوئے دکھائیے، کہ $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$۔

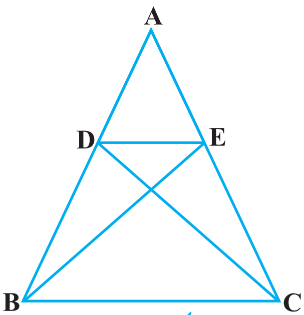
4۔ شکل 6.36 میں $\frac{QT}{PR} = \frac{QR}{QS}$ اور $\angle 1 = \angle 2$ دکھایئے کہ

$\Delta PQS \sim \Delta TQR$



شکل 6.36

5۔ S اور T، ΔPQR کے اضلاع PR اور QR پر دو نقطے ہیں جب کہ $\angle P = \angle RTS$ دکھایئے کہ $\Delta PRQ \sim \Delta RTS$



شکل 6.37

6۔ شکل 6.37 میں اگر $\Delta ACD = \Delta ABE$ دکھایئے کہ

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$

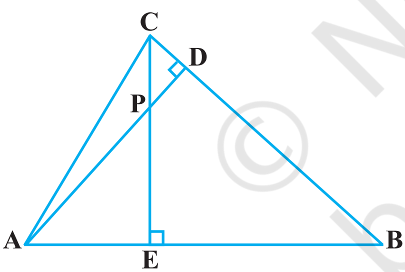
7۔ شکل 6.38 میں ΔABC کے ارتفاعات AD اور CE ایک دوسرے کو نقطہ P پر قطع کرتے ہوں تو دکھایئے کہ

(i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$

(ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$

(iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$

(iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$



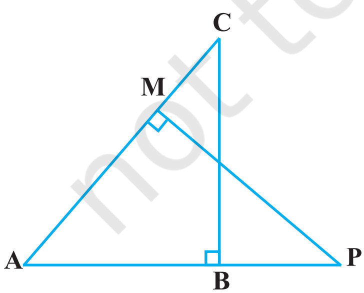
شکل 6.38

8۔ متوازی الاضلاع ABCD کے بڑھے ہوئے ضلع AD پر کوئی نقطہ E ہے اور BE، CD کو F پر قطع کرتا ہے۔ دکھایئے کہ $\Delta ABE \sim \Delta CFB$.

9۔ شکل 6.39 میں، ABC اور AMP دو قائم مثلثیں ہیں جو بالترتیب B اور M پر قائم ہیں: ثابت کیجیے کہ

(i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

(ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$



شکل 6.39

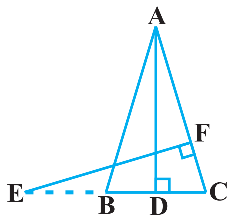
10۔ CD اور GH بالترتیب $\angle ACB$ اور $\angle EGF$ کے ناصف ہیں جب کہ D اور H بالترتیب ΔABC اور ΔFEG کے اضلاع AB اور FE پر واقع ہیں اگر $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ دکھایئے کہ

$$\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG} \qquad \text{(i)}$$

$$\Delta\, DCB \sim \Delta\, HGE \qquad \text{(ii)}$$

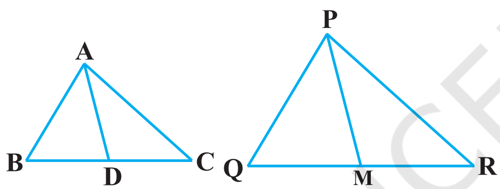
$$\Delta\, DCA \sim \Delta\, HGF \qquad \text{(iii)}$$

11۔ شکل 6.40 میں E مساوی الساقین مثلث ABC جس میں $AB = AC$، کے بڑھتے ہوئے ضلع CB پر ایک نقطہ E ہے اگر $AD \perp BC$ اور $EF \perp AC$ ثابت کیجیے، کہ $\Delta\, ABD \sim \Delta\, ECF$



شکل 6.40

12۔ مثلث ABC کے اضلاع AB اور BC اور وسطانیہ AD بالترتیب ABC کے اضلاع PQ , QR اور وسطانیہ PM کے متناسب ہیں (شکل 6.41 دیکھیے) دکھائیے کہ $\Delta\, ABC \sim \Delta\, PQR$۔



شکل 6.41

13۔ ABC کے ضلع BC پر D ایک نقطہ ہے جبکہ $\angle ADC = \angle BAC$ دکھائیے کہ $CA^2 = CB.CD$

14۔ مثلث ABC کے اضلاع AB اور AC اور وسطانیہ AD بالترتیب DPQR کے اضلاع PQ اور PR اور وسطانیہ PM کے تناسب میں ہیں۔ دکھائیے کہ $\Delta\, ABC \sim \Delta\, PQR$

15۔ 6 میٹر لمبے ایک انتصابی پول کی گراؤنڈ پر 4 میٹر لمبی پرچھائی بنتی ہے اسی لمحہ ایک ٹاور کی پرچھائی 28 میٹر لمبی بنتی ہے ٹاور کی اونچائی معلوم کیجیے۔

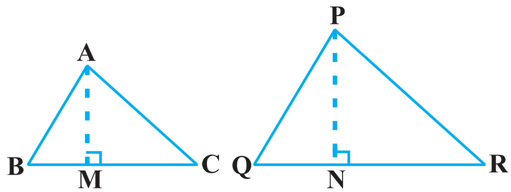
16۔ اگر AD اور PM بالترتیب مثلث ABC اور PQR کے وسطانیہ ہیں جہاں $\Delta\, ABC \sim \Delta\, PQR$ ثابت کیجیے کہ $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$.

6.5 مشابہ مثلثوں کا رقبہ

آپ سیکھ چکے ہیں کہ دو مشابہ مثلثوں میں ان کے نظیری اضلاع کی نسبت برابر ہوتی ہے۔ کیا آپ سوچتے ہیں کہ دو مشابہ

مثلثوں کے رقبوں اور اضلاع میں کوئی تعلق ہے؟ آپ جانتے ہیں کہ رقبہ کی پیمائش مربع اکائیوں میں ہوتی ہے۔اس لئے آپ توقع کر سکتے ہیں کہ یہ نسبت ان کے نظیری اضلاع کے مربعوں کی نسبت ہوگی۔ درحقیقت یہ صحیح ہے۔اور اس کو ہم مندرجہ ذیل مسئلے میں ثابت کریں گے۔

مسئلہ 6.6: دو مشابہ مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے نظیری اضلاع کے مربعوں کی نسبت کے برابر ہوتی ہے



شکل 6.42

ثبوت: ہمیں دو مثلث ABC اور PQR دیے ہوئے ہیں جب کہ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (شکل 6.42 دیکھیے)

ہم کو ثابت کرنا ہے کہ
$$\frac{ar\,(ABC)}{ar\,(PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2 .$$

دونوں مثلثوں کا رقبہ معلوم کرنے کے لئے ہم مثلثوں کے ارتفاعات AM اور PN بناتے ہیں۔

اب
$$ar(ABC) = \frac{1}{2}\, BC \times AM$$

اور
$$ar(PQR) = \frac{1}{2}\, QR \times PN$$

اس لئے
$$\frac{ar\,(ABC)}{ar\,(PQR)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AM}{\frac{1}{2} \times QR \times PN} = \frac{BC \times AM}{QR \times PN} \qquad (1)$$

اب ΔABM اور ΔPQN میں

$\angle B = \angle Q$ (کیونکہ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$)

اور $\angle M = \angle N$ (ہر ایک 90° کا ہے)

اس لئے $\Delta ABM = \Delta PQN$ (مشابہت A.A شرط)

اس لئے
$$\frac{AM}{PN} = \frac{AB}{PQ} \qquad (2)$$

مزید $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (دیا ہوا ہے)

اس لیے $\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{CA}{RP}$ (3)

اس لیے $\frac{ar\ (ABC)}{ar\ (PQR)}=\frac{AB}{PQ}\times\frac{AM}{PN}$ [(1)اور(3)سے]

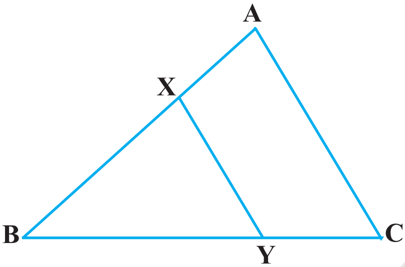
$=\frac{AB}{PQ}\times\frac{AB}{PQ}$ [(2)سے]

$=\left(\frac{AB}{PQ}\right)^2$

اب (3) کو استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{ar\ (ABC)}{ar\ (PQR)}=\left(\frac{AB}{PQ}\right)^2=\left(\frac{BC}{QR}\right)^2=\left(\frac{CA}{RP}\right)^2$$

اس مسئلے کے استعمال کی وضاحت کے لیے آیئے کچھ مثالیں لیتے ہیں۔



شکل 6.43

مثال 9: شکل 6.43 میں قطع خط XY، ΔABC کے ضلع AC کے متوازی ہے۔اور یہ مثلث کو مساوی رقبہ والے دو حصوں میں منقسم کرتا ہے۔نسبت $\frac{AX}{AB}$ معلوم کیجیے۔

حل: ہمارے پاس ہے $XY \parallel AC$ (دیا ہوا ہے)

اس لیے $\angle BXY=\angle A$ اور $\angle BYX=\angle C$ (نظیری زاویہ)

اس لیے $\Delta ABC \sim \Delta XBY$ (A.A مشابہت کی شرط)

اس لیے $\frac{ar\ (ABC)}{ar\ (XBY)}=\left(\frac{AB}{XB}\right)^2$ (1)

مزید $ar(ABC)=2ar\ (XBY)$ (دیا ہوا ہے)

اس لیے $\frac{ar\ (ABC)}{ar\ (XBY)}=\frac{2}{1}$ (2)

اس لیے (1) اور (2) سے

$$\left(\frac{AB}{XB}\right)^2=\frac{2}{1}$$ یعنی $$\frac{AB}{XB}=\frac{\sqrt{2}}{1}$$

یا
$$\frac{XB}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

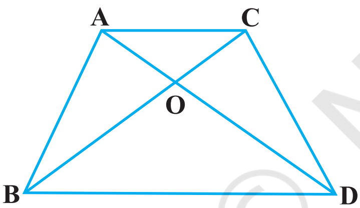
یا
$$1 - \frac{XB}{AB} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

یا
$$\frac{AB - XB}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \text{ یعنی } \frac{AX}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

مشق 6.4

1۔ مان لیجیے $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ اوران کے رقبہ بالترتیب 64 سینٹی میٹر مربع اور 121 سینٹی میٹر مربع ہیں اگر EF=15.4 توBC معلوم کیجیے۔

2۔ایک منحرف ABCD جس میں AB ॥ DC کے وتر ایک دوسرے کونقطہ O. پر قطع کرتے ہیں۔اگر AB = 2CD تو مثلث AOB اور COD کےرقبوں کی نسبت معلوم کیجیے۔



شکل 6.44

3۔ شکل 6.44 میں ایک ہی قاعدہ BC پر بنے دو مثلث ABC اور DBC ہیں اگر BC,AD کونقطہ O. پر قطع کرتا ہے تو دکھایئے
$$\frac{ar\,(ABC)}{ar\,(DBC)} = \frac{AO}{DO}.$$

4۔ اگر دومشابہ مثلثوں کے رقبہ برابر ہیں تو ثابت کیجیے کہ یہ متماثل ہوں گے۔

5۔ E,D اور F بالترتیب مثلث ABC کے اضلاع BC AB اور CA کے وسطی نقطے ہیں Δ DEF اور Δ ABC کے رقبوں کی نسبت معلوم کیجیے۔

6۔ ثابت کیجیے کہ دومشابہ مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے نظیر وسطانیوں کے مربعوں کی نسبت کے برابر ہے۔

7۔ ثابت کیجیے کہ کسی مربع کے ایک ضلع پر بنے مساوی ضلعی مثلث کا رقبہ اس کے وتر پر بنے مساوی ضلعی مثلث کے رقبہ کا نصف ہے۔

صحیح جواب پر صحیح کا نشان لگایئے اور جواز پیش کیجیے۔

8۔ ABC اور BDF دومساوی ضلعی مثلث ہیں جب کہ D کا وسطی نقطہ ہے۔مثلثوں ABC اور BDF کی نسبت ہے۔

(A) 2 : 1 (B) 1 : 2 (C) 4 :1 (D)1 : 4

9۔ دو مشابہ مثلثوں کے اضلاع 4 : 9 کی نسبت میں ہیں ان مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ہے۔

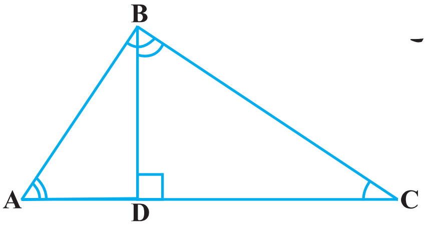
(A) 2 : 3 (B) 4 : 9 (C) 81 : 16 (D) 16 : 81

6.6 فیثا غورث کا مسئلہ

آپ اپنی سابقہ کلاسوں میں فیثا غورث کے مسئلے سے اچھی طرح واقف ہو چکے ہیں۔ آپ نے اس مسئلے کی تصدیق کئی عملی کام کر کے اور اس کا استعمال بہت سے مسئلوں کو حل کرنے میں کیا۔

آپ نے اس مسئلہ کا ثبوت نویں کلاس میں بھی کیا۔

اب ہم مشابہ مثلثوں کے تصور کو استعمال کر کے اس کو ثابت کریں گے۔



شکل 6.45

اس طرح سے ثابت کرنے میں ہم ان دو مشابہ مثلثوں سے متعلق ایک نتیجہ کا استعمال کریں گے۔ جو ہے ایک قائم مثلث قائم زاویہ والے راس سے اس کے وتر پر عمود ڈالنے سے بنتے ہیں آیئے ایک قائم مثلث ABC لیتے ہیں جو B پر قائم ہے۔ مان لیجئے BD وتر AC پر عمود ہے۔ (شکل 6.45 دیکھئے)

آپ نوٹ کر سکتے ہیں کہ Δ ADB اور Δ ABC میں

$$\angle A = \angle A$$

اور $\angle ADB = \angle ABC$ (کیوں؟)

اس لئے $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (کیسے؟) (1)

اسی طرح سے $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (کیسے؟) (2)

اس لئے (1) اور (2) سے یہ نتیجہ سامنے آتا ہے کہ عمود BD کے دونوں طرف بنے مثلث اصل مثلث ABC کے مشابہ ہیں

مزید، کیونکہ $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

اور $\Delta BDC \sim \Delta ABC$

اس لئے $\Delta ADB \sim \Delta BDC$ (سیکشن 6.2 کے ریمارک سے)

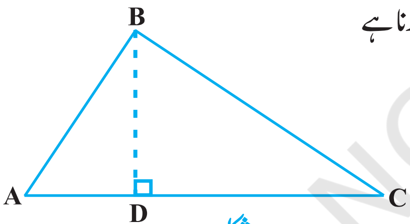
مذکورہ بالا بحث سے ہمیں مندرجہ ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

فیثا غورث
(569-479 قبل مسیح)

مسئلہ 6.7: اگر کسی قائم زاوی مثلث کے قائم زاویہ والے راس سے ایك عمود اس کے وتر پر ڈالا جائے تو عمود کے دونوں طرف بنے مثلث اصل مثلث کے اور آپس میں مشابہ ہوں گے۔

آیئے اس مسئلے کو ہم فیثا غورث کے مسئلے کو ثابت کرنے میں استعمال کریں۔

مسئلہ 6.8: ایك قائم مثلث میں ،وتر کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے حاصل جمع کے برابر ہوتا ہے۔



شکل 6.46

ثبوت: ہمیں ایک قائم ABC دیا ہوا ہے جو B پر قائم ہے ہمیں ثابت کرنا ہے

کہ $AC^2 = AB^2 + BC^2$

آیئے ایک $BD \perp AC$ (شکل 6.46 دیکھیے)

اب $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (مسئلہ 6.7)

اس لئے $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ (اضلاع متناسب میں)

یا $AD \,.\, AC = AB^2$ (1)

مزید $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (مسئلہ 6.7)

اس لئے $\frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$

یا $CD \,.\, AC = BC^2$ (2).

(1) اور (2) کو ملانے سے

$$AD \,.\, AC + CD \,.\, AC = AB^2 + BC^2$$

یا $AC\,(AD + CD) = AB^2 + BC^2$

یا $AC \,.\, AC = AB^2 + BC^2$

یا $AC^2 = AB^2 + BC^2$

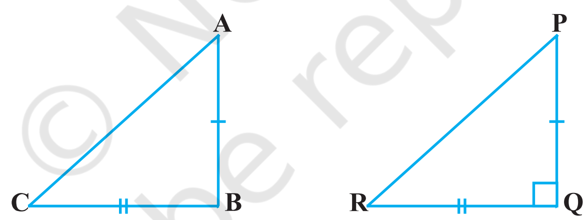
مذکورہ بالا مسئلے کو سب سے پہلے ایک قدیم ہندوستانی ریاضی داں بودھائن (تقریباً 800ق۔م) نے مندرجہ ذیل شکل میں بیان کیا تھا۔

مستطیل کا وتر خود کے ساتھ وہی رقبہ دیتا ہے جو اس کے دونوں اضلاع (لمبائی اور چوڑائی) دیتے ہیں۔اس وجہ سے کبھی کبھی یہ مسئلہ بودھائن کے مسئلہ کے نام سے بھی جانا جاتا ہے۔

فیثا غورث کے مسئلے کے معکوس کے بارے میں کیا خیال ہے؟ آپ سابقہ کلاسوں میں اس کی تصدیق کر چکے ہیں کہ یہ صحیح ہے۔اب ہم اس کو ایک مسئلے کے طور پر ثابت کریں گے۔

مسئلہ 6.9: ایک مثلث میں اگر ایک ضلع کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے حاصل جمع کے برابر ہے تو پہلے ضلع کے سامنے والا زاویہ قائمہ ہوگا۔

ثبوت: یہاں ہمیں دیا ہوا ہے کہ ایک مثلث ABC میں $AC^2 = AB^2 + BC^2$۔



شکل 6.47

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $\angle B = 90^\circ$

سب سے پہلے ہم ایک قائم Δ PQR اس طرح بناتے ہیں کہ $PQ = AB$, $QR = BC$ اور $\angle Q = 90^\circ$

اب Δ PQR میں:

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ (فیثا غورث کا مسئلہ کیونکہ $\angle Q = 90^\circ$)

$PR^2 = AB^2 + BC^2$ (بناوٹ سے) (1)

لیکن $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (دیا ہوا ہے)

اس لئے $AC = PR$

اب ΔABC اور ΔPQR میں

$AB = PQ$ (بناوٹ سے)

$BC = QR$ (بناوٹ سے)

$AC = PR$ (3 میں ثابت ہو چکا ہے)

اس لئے $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (SSS مماثلت)

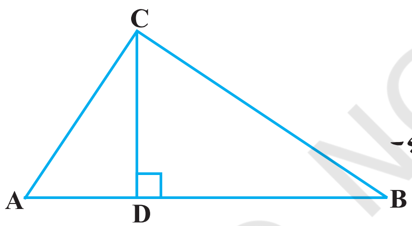
$\angle B = \angle Q$ (CPCT)

لیکن $\angle Q = 90^\circ$ (بناوٹ سے)

اس لئے $\angle B = 90^\circ$

نوٹ: اس مسئلہ کو دوسرے ثبوت کے لئے ضمیمہ 1 دیکھیے۔

آیئے اس مسئلے کو استعمال کی مزید وضاحت کے لئے کچھ مثالیں لیجیے۔



شکل 6.48

مثال 10: شکل 6.48 میں $\angle ACB = 90^\circ$

اور $CD \perp AB$، ثابت کیجیے کہ $\dfrac{BC^2}{AC^2} = \dfrac{BD}{AD}$.

حل:

$\Delta ACD \sim \Delta ABC$

(مسئلہ 6.7)

اس لئے $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AD}{AC}$

یا $AC^2 = AB \,.\, AD$ (1)

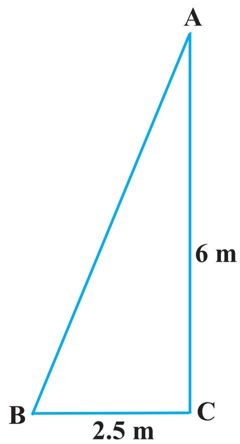
اسی طرح سے $\Delta BCD \sim \Delta ABC$ (مسلہ 6.7)

اس لئے $\dfrac{BC}{BA} = \dfrac{BD}{BC}$

یا $BC^2 = BA . BD$

اس لئے (1) اور (2) سے،

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BA \cdot BD}{AB \cdot AD} = \frac{BD}{AD}$$


شکل 6.49

مثال 11: ایک سیڑھی دیوار سے اس طرح لگی کھڑی ہے کہ اس کا پایہ دیوار سے 2.5 میٹر کے فاصلہ پر اور اس کا اوپری حصہ ایک 6 میٹر اونچی کھڑکی تک پہنچ رہا ہے۔ سیڑھی کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے AB سیڑھی کو ظاہر کرتا ہے اور CA دیوار کو جس میں A کھڑکی کو (شکل 6.49 دیکھیے)

مزید $BC = 2.5$ میٹر اور $CA = 6$ میٹر

فیثاغورث کے مسئلے کے مطابق ہمارے پاس ہے:

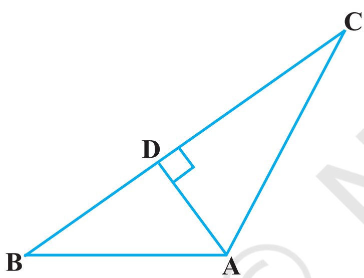
$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

$$= (2.5)^2 + (6)^2$$

$$= 42.25$$

اس لئے $AB = 6.5$

اس طرح سے سیڑھی کی لمبائی 6.5 میٹر ہے۔


شکل 6.50

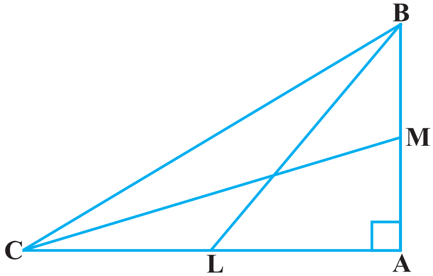
مثال 12: شکل 6.50 میں اگر $AD \perp BC$ ثابت کیجیے کہ

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

(فیثاغورث کا مسئلہ) (1)

حل: $\Delta\, ADB$ سے ہمارے پاس ہے

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$



شکل 6.51

(فیثاغورث کا مسلہ) (2)

(1) کو (2) میں سے گھٹانے پر ہمارے پاس ہے۔

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$$

یا
$$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$$

مثال 13: BL اور CM ایک قائم مثلث، جو A پر قائم ہے کے وسطانئے ہیں۔ ثابت کیجیے کہ $4(BL^2+CM^2)=5BC^2$

حل: BL اور CM، Δ ABC کے وسطانئے ہیں جس میں $\angle A = 90°$۔ (شکل 6.51 دیکھیے)

Δ ABC سے

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad \text{(1)}$$ (فیثاغورث کا مسئلہ)(1)

Δ ABL سے

$$BL^2 = AL^2 + AB^2$$

یا
$$BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2$$ (L، BC کا وسطی نقطہ ہے)

یا
$$BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$$

یا
$$4BL^2 = AC^2 + 4AB^2 \quad (2)$$

Δ CMA میں

$$CM^2 = AC^2 + AM^2$$

یا
$$CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$ (M، AB کا وسطی نقطہ ہے)

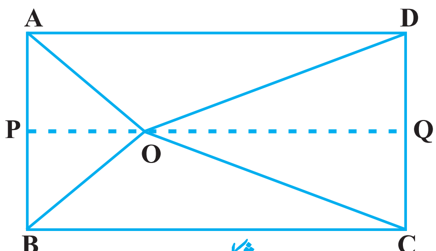
یا
$$CM^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$$

یا
$$4CM^2 = 4AC^2 + AB^2 \quad (3)$$

(2) اور (3) کو جمع کرنے پر ہمارے پاس ہے

$$4(BL^2 + CM^2) = 5(AC^2 + AB^2)$$

یعنی $4\,(BL^2 + CM^2) = 5\,BC^2$



شکل 6.52

مثال 14: مستطیل ABCD کے اندر ایک نقطہ O ہے (شکل 6.52 دیکھیے)

ثابت کیجیے کہ $OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$

حل: O سے گذرتا ہوا $PQ \parallel BC$ اس طرح کھینچیے کہ AB , P اور Q , DC پر واقع ہو

اب $PQ \parallel BC$

اس لئے $PQ \perp AB$ اور $PQ \perp DC\,(\angle B = 90^\circ$ اور $\angle C = 90^\circ)$

اس لئے $\angle BPQ = 90^\circ$ اور $\angle CQP = 90^\circ$

اس لئے، BPQC اور APQD دونوں مستطیل ہیں

اب $\Delta\, OPB$ سے

$$OB^2 = BP^2 + OP^2 \qquad (1)$$

اسی طرح سے $\Delta\, OQD$ میں

$$OD^2 = OQ^2 + DQ^2 \qquad (2)$$

$\Delta\, OQC$ ہمارے پاس ہے

$$OC^2 = OQ^2 + CQ^2 \qquad (3)$$

اور D OAP سے ہمارے پاس ہے

$$OA^2 = AP^2 + OP^2 \qquad (4)$$

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر

$$OB^2 + OD^2 = BP^2 + OP^2 + OQ^2 + DQ^2$$

$$= CQ^2 + OP^2 + OQ^2 + AP^2$$

(کیونکہ $BP = CQ$ اور $DQ = AP$)

$$=CQ^2 + OQ^2 + OQ^2 + AP^2$$

$$=OC^2 + OA^2 \quad \text{[(3) اور (4) سے]}$$

مشق 6.5

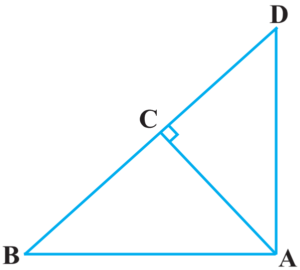
1۔ مثلثوں کے اضلاع مندرجہ ذیل میں دیے گئے ہیں۔ معلوم کیجیے کہ ان میں کون سے قائم مثلث ہیں۔ اگر مثلث قائم ہوں تو ان کے وتر کی لمبائی معلوم کیجیے۔

(i) 7cm, 24cm, 25cm

(ii) 3cm, 8cm, 6cm

(iii) 50cm, 80cm, 100cm

(iv) 13cm, 12cm, 5cm



شکل 6.53

2۔ PQR ایک مثلث ہے جو P پر قائم ہے اور M، QR پر ایک نقطہ ہے جب کہ $PM \perp QR$. دکھائیے کہ $PM^2 = QM \cdot MR$

3۔ شکل 6.53 میں ABD ایک مثلث ہے جو A پر قائم ہے اور $AC \perp BD$ دکھائیے کہ

(i) $AB^2 = BC \cdot BD$

(ii) $AC^2 = BC \cdot DC$

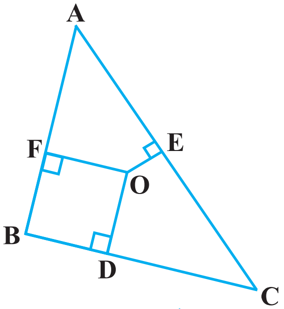
(iii) $AD^2 = BD \cdot CD$

4۔ ABC ایک مساوی الساقین قائم مثلث ہے جو C پر قائم ہے ثابت کیجیے کہ $AB^2 = 2AC^2$

5۔ ABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں $AC = BC$، اگر $AB^2 = 2AC^2$ تو ثابت کیجیے کہ ABC ایک قائم مثلث ہے۔

6۔ ABC ایک مساوی ضلعی مثلث ہے جس کا ہر ایک ضلع $2a$ ہے۔ اس کا ہر ایک ارتفاع معلوم کیجیے۔

7۔ ثابت کیجیے کہ معین کے اضلاع کے مربعوں کا حاصل جمع اس کے وتروں کے مربع کے حاصل جمع کے برابر ہے۔



شکل 6.54

8۔ شکل 6.54 میں O مثلث ABC کے اندرون میں ایک نقطہ ہے اور $OD \perp BC$،
$OE \perp AC$ اور $OF \perp AB$۔ دکھایئے کہ

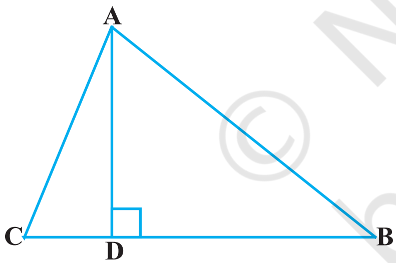
$$OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2 \quad \text{(i)}$$

$$AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2 \quad \text{(ii)}$$

9۔ 10 میٹر لمبی ایک سیڑھی زمین سے 8 میٹر اونچائی پر موجود ایک کھڑکی تک پہنچتی ہے سیڑھی کے نچلے سرے کا دیوار کے قاعدہ سے فاصلہ معلوم کیجیے۔

10۔ ایک تار جس کی لمبائی 24 میٹر ہے 18 سینٹی میٹر اونچے ایک انتصابی پول سے جڑا ہوا ہے اور اس کا دوسرا سرا ایک کھونٹے سے منسلک ہے پول کے قاعدہ سے کھونٹے کو کتنی دوری تک لے جایا جائے کہ تار بالکل تن جائے۔

11۔ ایک ہوائی جہاز ایئر پورٹ سے اڑ کر 1000 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے شمال کی طرف پرواز کرتا ہے۔ اسی وقت ایک دوسرا جہاز ائیر پورٹ سے اڑ کر 1200 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے مغرب کی طرف جاتا ہے۔ $1\frac{1}{2}$ گھنٹے بعد دونوں ہوائی جہازوں کے درمیان کتنا فاصلہ ہے۔



شکل 6.55

12۔ دو پول جن کی لمبائیاں 6 میٹر اور 11 میٹر ہیں ایک مسطح گراؤنڈ پر کھڑے ہیں اگر ان کے نچلے سروں کے درمیان فاصلہ 12 میٹر کا ہے تو ان کے اوپری سروں کے درمیان کا فاصلہ معلوم کیجیے۔

13۔ ABC کے اضلاع CA اور CB پر بالترتیب دو نقطے D اور E ہیں۔ اگر مثلث C پر قائم ہے تو ثابت کیجیے کہ

$$AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$$

14۔ ΔABC کے ضلع BC پر A سے ڈالا گیا عمود BC کو D پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ $DB = 3CD$ (شکل 6.55 دیکھیے) ثابت کیجیے کہ $2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$

16۔ ایک مساوی ضلعی مثلث میں ثابت کیجیے کہ اس کے ایک ضلع کے مربع کا 3 گنا اس کے ایک ارتفاع کے مربع کے 4 گنا کے برابر ہے۔

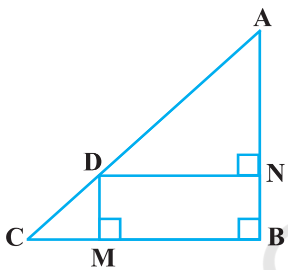
17۔ صحیح جواب کو ٹک کیجیے اور اپنے جواب کا جواز پیش کیجیے ΔABC میں AB = $6\sqrt{3}$ سینٹی میٹر، AC = 12 سینٹی میٹر اور BC = 6 سینٹی میٹر = زاویہ B ہے۔

(A) 60°　(B) 120°

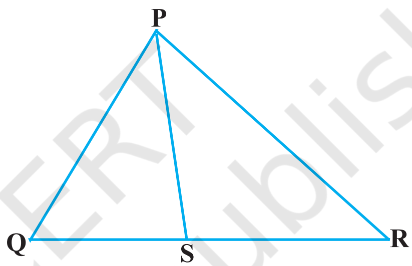
(C) 90°　(D) 45°

مشق 6.6 (اختیاری)*

1۔ شکل 6.56 میں PQR ∠, PS کے زاویہ QRP کا ناصف ہے ثابت کیجیے کہ $\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR}$.



شکل 6.57



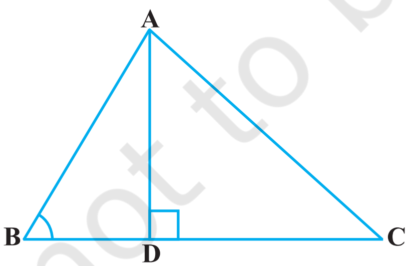
شکل 6.56

2۔ شکل 6.57 میں D, Δ ABC کے وتر پر ایک نقطہ اس طرح ہے کہ DM ⊥ BC اور DN ⊥ AB ثابت کیجیے کہ

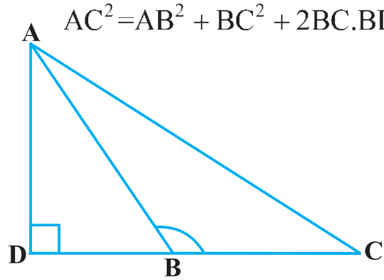
(i) $DM^2 = DN \cdot MC$　(ii) $DN^2 = DM \cdot AN$

3۔ شکل 6.58 میں، ABC ایک مثلث ہے جس میں ∠ABC > 90° اور AD ⊥ CB (بڑھانے پر) ثابت کیجیے کہ

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$$

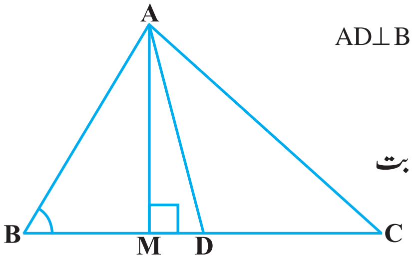


شکل 6.59



شکل 6.58

* یہ مشقیں امتحان کے نقطہ نظر سے نہیں ہیں۔



شکل 6.60

4۔ شکل 6.59 میں ABC ایک مثلث ہے جس میں $\angle ABC > 90^\circ$ اور $AD \perp BC$

ثابت کیجیے کہ $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$

5۔ شکل 6.60 میں AD، مثلث ABC کا وسطانیہ ہے اور $AM \perp BC$ ثابت کیجیے کہ

$$AC^2 = AD^2 + BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 \quad \text{(i)}$$

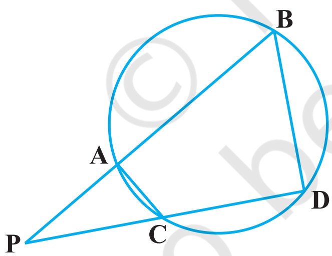
$$AB^2 = AD^2 - BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 \quad \text{(ii)}$$

$$AC^2 + AB^2 = 2AD + \frac{1}{2}BC^2 \quad \text{(iii)}$$

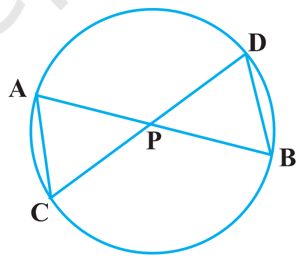
6۔ ثابت کیجیے کہ متوازی الاضلاع کے وتروں کے مربعوں کا حاصل جمع اس کے اضلاع کے مربعوں کے حاصل جمع کے برابر ہے۔

7۔ شکل 6.61 میں دائرہ کے دو وتر AB اور CD ایک دوسرے کو نقطہ P پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کیجیے کہ

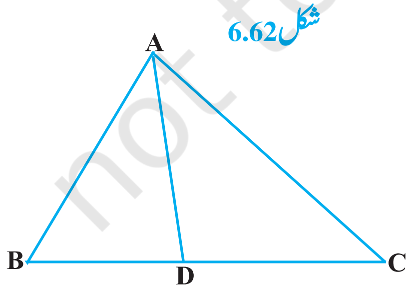
(i) $\Delta APC \sim \Delta DPB$ (ii) $AP.PB = CP.DP$



شکل 6.62



شکل 6.61



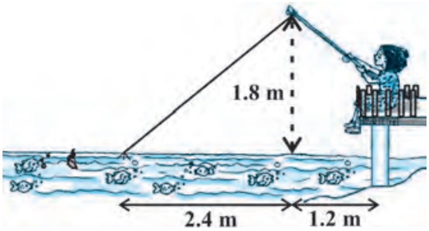
شکل 6.63

8۔ شکل 6.62 میں دائرے کے دو وتر AB اور CD ایک دوسرے کو نقطہ P پر قطع کرتے ہیں (بڑھانے پر) دائرہ کے باہر ثابت کیجیے

(i) $\Delta PAC \sim \Delta PDB$ (ii) $PA.PB = PC.PD$

9۔ شکل 6.63 میں ΔABC, D کے ضلع BC پر ایک نقطہ ہے جب

کہ $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ ثابت کیجیے کہ AD ، $\angle BAC$ کا ناصف ہے۔



شکل 6.64

10۔ ناظمہ پانی میں مچھلی کا شکار کر رہی ہے۔ اس کی مچھلی پکڑنے والی چھڑی کا سرا پانی کی سطح سے 1.8 میٹر اوپر ہے۔ اور کانٹے مچھلی پکڑنے کی ڈور کے سرے پر پانی پر 3.6 میٹر کی دوری پر ہے اور اس مچھلی پکڑنے والی چھڑی کی سرا کی ٹھیک نیچے سے 2.4 میٹر کے فاصلہ پر یہ مانتے ہوئے کہ روڈ (چھڑ کے ٹپ سے اوپر تک) پوری طرح تنی ہوئی ہے اس کے پاس کتنی ڈور ہے (شکل 6.64 دیکھئے) اگر وہ ڈور کو 5 سینٹی میٹر فی سیکنڈ کی شرح سے کھینچے تو 12 سیکنڈ بعد کانٹے کا اس سے افقی فاصلہ کتنا ہوگا۔

6.7 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں

1۔ دو اشکال جن کی شکل یکساں ہو لیکن ضروری نہیں سائز بھی ایک ہو تو وہ مشابہ اشکال کہلاتی ہیں۔

2۔ تمام متماثل اشکال مشابہ ہوتی ہیں لیکن اس کا معکوس درست نہیں ہے۔

3۔ دو کثیر ضلعی جن کے اضلاع کی تعداد مساوی ہے مشابہ ہوں گے اگر (i) ان کے نظیری زاویہ برابر ہوں (2) ان کے نظیر اضلاع کی نسبت برابر ہو (یعنی متناسب ہو)

4۔ اگر مثلث کے ایک ضلع کے متوازی ایک قطر کھینچا جائے جو باقی دونوں اضلاع کو مختلف نقطوں پر قطع کرے تو تب دونوں اضلاع ایک ہی نسبت میں منقسم ہوتے ہیں۔

5۔ اگر کوئی خط مثلث کے دو اضلاع کو مساوی نسبت میں منقسم کرے تو وہ خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے۔

6۔ دو مثلثوں میں اگر نظیری زاویے مساوی ہوں تب ان کے نظیری اضلاع کی نسبت بھی برابر ہوگی اور اس طرح دونوں مثلث مشابہ ہوں گے (AAA مشابہت کی شرط)

7۔ دو مثلثوں میں اگر ایک مثلث کے دو زاویہ دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے برابر ہوں تب دو مثلث مشابہ ہوں گے (AAA مشابہت کی شرط)

8۔ اگر دو مثلثوں میں نظیری اضلاع کی نسبت برابر ہو تب ان کے نظیر زاویہ برابر ہوں گے اور اس طرح سے دونوں مثلث مشابہ ہوں گے۔(SSS مشابہت کی شرط)

9۔ اگر ایک مثلث کا ایک زوایہ دوسرے مثلث کے ایک زاویہ کے برابر ہو اور ان کے زاویوں کے حامل اضلاع بھی متناسب ہوں تو دونوں مثلث مشابہ ہوں گے۔(SAS مشابہت کی شرط)

10۔ دو مشابہ مثلثوں کی رقبوں کی نسبت ان کے نظیری اضلاع کے مربعوں کی نسبت کے برابر ہوتی ہے۔

11۔ اگر ایک قائم زاوی مثلث کے قائم زاویہ سے ایک عمود وتر پر ڈالا جائے تب اس عمود کے دونوں طرف بنے مثلث اصل مثلث اور آپس میں مشابہ ہوں گے۔

12۔ ایک قائم مثلث میں وتر کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے حاصل جمع کے برابر ہے(فیثا غورث کا مسئلہ)

13۔ اگر ایک مثلث میں، ایک ضلع کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے حاصل جمع کے برابر ہو تو پہلے ضلع کے سامنے کا زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

قارئین کے لئے نوٹ

اگر دو قائم مثلثوں میں ایک مثلث کا وتر اور ایک ضلع دوسرے مثلث کے وتر اور ضلع کے متناسب ہو تو دو مثلث مشابہ ہوں گے۔ اس کو ہم مشابہت کی RHS شرط کہتے ہیں۔ اگر آپ اس شرط کو باب 8 کی مثال 2 میں استعمال کریں تو ثبوت بہت آسان ہو جائے گا۔