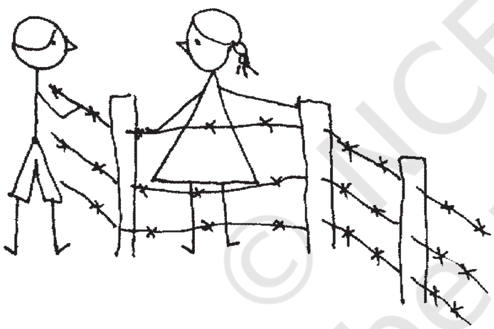
ضمیمہ 1

ریاضی میں ثبوت (PROOFS IN MATHEMATICS)

A1.1 تعارف (Introduction)



فرض کیجیے آپ کے کنبہ کے پاس زمین کا ایک پلاٹ ہے جسکی باؤنڈری نہیں بنی ہے۔ آپ کے پڑوسی نے ایک دن اپنے پلاٹ کی باؤنڈری کرانے کا فیصلہ کیا۔ جب وہ اپنی زمین کی باؤنڈری کرا چکا تب آپ کو پتہ چلا کے آپکے کنبہ کی زمین کا بھی کچھ حصہ اس نے اپنی باؤنڈری میں لے لیا۔ آپ اپنے پڑوسی کو ثابت کیسے کرینگے کہ اس نے آپ کی زمین پر قبضہ کرنے کی کوشش کی ہے؟ باؤنڈریوں کے فرق کو طے کرنے کے لئے آپ کا پہلا قدم گاؤں کے بزرگوں کی مدد لینا ہوگا۔ فرض کیجیے اگر بزرگوں کے نظریات میں بھی فرق ہوا یعنی کچھ لوگ یہ سمجھیں کہ آپ ٹھیک ہیں اور کچھ یہ سمجھیں کہ آپ کا پڑوسی ٹھیک ہے۔ اب آپ کیا کر سکتے ہیں؟ آپ کے پاس یہی راستہ بچا ہے کہ اپنی راہ خود تلاش کریں جو فریقین کو بھی قابلِ قبول ہو، مثال کے طور پر حکومت کی طرف سے تسلیم شدہ آپ کے گاؤں کے نقشہ کا استعمال ہوسکتا ہے یا اگر ضروری ہو تو اپنے اس دعوے کو ثابت کرنے کے لئے کہ آپ صحیح ہیں اور آپ کا پڑوسی غلط، آپ عدالت کا دروازہ بھی کھٹکٹا سکتے ہیں۔

آیئے اب ایک دوسری صورتِ حال پر غور کرتے ہیں۔ مان لیجیے آپ کی ماں نے آپکے مکان کا اگست 2005 کا بجلی کا بل ادا کیا لیکن ستمبر 2005 کے بل میں یہ دعوئی کیا گیا ہے کہ آپ نے اگست کے مہینہ کا بل نہیں ادا کیا بجلی کے محکمہ کے اس دعوئی کو آپ

کس طرح غلط ثابت کرینگے؟ آپ پچھلے مہینہ کے بل کی رسید پیش کرینگے جو یہ ثابت کرے گی کے آپ اگست کے مہینہ کا بل ادا کر چکے ہیں۔

آپ نے ابھی کچھ مثالیں دیکھیں جس سے پتہ چلتا ہے کہ ہماری روزمرہ زندگی میں ہمیں اکثر کچھ بیانوں یا دعووں کو صحیح یا غلط ثابت کرنا ہوتا ہے، لیکن اس کے ساتھ ساتھ ہم کچھ بیانوں کو بغیر ثبوت کے قبول کر لیتے ہیں۔لیکن ریاضی میں ہم صرف ان بیانوں کو قبول کرتے ہیں جسکو ریاضی کی منطق سے ثابت کیا گیا ہو۔

حقیقت میں ریاضی میں ثبوتوں کو وجود ہزاروں سال سے ہے اور ریاضی کی کسی بھی شاخ میں انکو مرکزی اہمیت حاصل ہے، ایسا مانا جاتا ہے کہ پہلا جانا پہچانا ثبوت ایک یونانی فلسفی اور ریاضی داں تھیلز نے دیا تھا، حالانکہ بہت سی قدیم تہذیبوں جیسے میسوپوٹامیہ، مصر، چین اور ہندوستان میں ریاضی کی مرکزی اہمیت تھی لیکن ایسی کوئی واضح شہادت نہیں ملتی جس سے پتہ چلے کے انھوں نے ثبوتوں کا استعمال کیا تھا جیسے ہم آج کرتے ہیں۔

اس باب میں ہم اس بات پر غور کرینگے کہ بیان کیا ہے اور ریاضی میں کس قسم کے دلائل شامل ہیں اور ریاضی کے ثبوت کن چیزوں پر مشتمل ہو۔

A 1.2 ریاضی کے طور پر قابل قبول بیانات

اس سیکشن میں ہم ریاضی کے طور پر قابل قبول بیانات کا مفہوم سمجھنے کی کوشش کرینگے ایک بیان ایک جملہ یہ ایک حکمیہ یا استعجابیہ جملہ نہیں ہے اور یقیناً بیان ایک سوال بھی نہیں ہے۔مثال کے طور پر:

آپ کے بالوں کا رنگ کیا ہے؟ بیان نہیں ہے، یہ ایک سوال ہے

جایئے اور میرے لئے ایک گلاس پانی لے کر آیئے'' یہ ایک التجا یا ایک حکم ہے' بیان نہیں ہے۔

کتنا خوبصورت Sunset ہے۔ایک فجائیہ ریمارک ہے بیان نہیں۔

لیکن' آپ کے بالوں کا رنگ کالا ہے، ایک بیان ہے۔

عمومی طور پر' بیان مندرجہ ذیل میں سے ایک ہوسکتا ہے

- ہمیشہ صحیح
- ہمیشہ غلط
- مبہم (ambiguous)

لفظ مبہم کی تشریح کی ضرورت ہے۔ ایسی دو صورت حال ہوتی ہیں جو بیان کو مبہم بناتی ہیں۔ پہلی صورت حال وہ ہوتی ہے جب ہم یہ طے ہی نہیں کر پاتے کہ بیان ہمیشہ صحیح ہے یا غلط۔ مثال کے طور پر کل جمعرات ہے' مبہم ہے۔ کیوں اس میں سیاق وسباق کافی نہیں ہے جس سے یہ پتہ چل سکے کہ یہ بیان صحیح ہے یا غلط۔ دوسری صورت حال وہ جب بیان داخلی (subjective) ہو یعنی کچھ لوگوں کے لئے یہ صحیح ہو اور کچھ کے لئے غلط۔ مثال کے طور پر' کتّے ذہین ہوتے ہیں'' ایک مبہم بیان ہے کیوں کہ کچھ لوگ اس کو درست مانتے ہیں اور کچھ لوگ نہیں مانتے۔

مثال 1: بیان کیجیے کہ آیا مندرجہ ذیل بیانات ہمیشہ صحیح ہیں یا ہمیشہ غلط ہیں یا مبہم۔ اپنے جواب کا جواز بھی پیش کیجیے۔

(i) ہفتہ میں 8 دن ہوتے ہیں

(ii) یہاں بارش ہو رہی ہے

(iii) سورج مغرب میں غروب ہوتا ہے

(iv) گوری ایک رحم دل لڑکی ہے (v) دو طاق صحیح اعداد کا حاصل ضرب جفت ہوتا ہے

(vi) اگر کسی عدد کو اسی سے تقسیم کریں تو ایک 1 حاصل ہوگا۔

(vii) دو جفت صحیح اعداد کا حاصل ضرب جفت عدد ہوتا ہے۔

حل:

(i) یہ بیان غلط ہے کیوں کہ ایک ہفتہ میں صرف 7 دن ہوتے ہیں۔

(ii) یہ بیان مبہم ہے کیوں کہ اس میں ''یہاں'' کی وضاحت نہیں کی گئی ہے۔

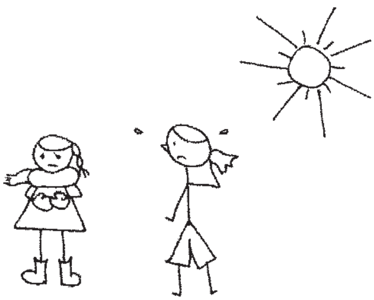
(iii) یہ بیان ہمیشہ صحیح ہے' سورج ہمیشہ مغرب میں ہی غروب ہوتا ہے اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا کہ ہم کہاں رہتے ہیں۔

(iv) یہ بیان مبہم ہے کیوں کہ یہ داخلی ہے۔ کیوں کہ کچھ لوگوں کے لئے گوری رحم دل ہوگی اور کچھ کے لئے نہیں۔

(v) یہ ہمیشہ غلط ہے کیوں کہ دو طاق صحیح اعداد کا حاصل ضرب ہمیشہ طاق ہوتا ہے۔

(vi) یہ بیان غلط ہے کیوں کہ صفر کے لئے یہ صحیح نہیں ہے۔

(vii) یہ بیان ہمیشہ درست ہے۔ اس کے صحیح ہونے کا جواز پیش کرنے کے لئے ہمیں کچھ کام کرنے کی ضرورت ہے یہ سیکشن A 1.4 میں ثابت کیا جائے گا۔



جیسا کہ پہلے بیان کیا گیا ہے ہم اپنی روزمرّہ زندگی بیانوں کی مقبولیت کے لئے زیادہ احتیاط نہیں برتتے۔ مثال کے طور پر فرض کیجیے آپ کا دوست آپ کو بتاتا ہے کہ جولائی کے مہینہ میں ہر دن منشاواری کیرالہ میں بارش ہوتی ہے۔ آپ اس پر یقین کر لیتے ہیں بھلے ہی جولائی کے مہینہ میں ایک یا دو دن بھی بارش نہیں ہوتی ہو۔ جب تک کہ آپ ایک وکیل نہیں ہیں آپ اس سے بحث نہیں کریں گے۔

ایک دوسری مثال، ان بیانوں پر غور کیجئے جو ہم ایک دوسرے کے ساتھ اکثر بولتے ہیں، جیسے آج بہت گرمی ہے، ہم آسانی سے اس کو قبول کر لیتے ہیں کیوں کہ ہم اس کے حوالے سے واقف ہیں۔ بھلے ہی یہ بیان مبہم ہوں۔ آج بہت گرمی ہے، یہ بیان مختلف لوگوں کے لئے مختلف مفہوم ادا کرتا ہے کیوں کہ کماؤں (kumaon) کے رہنے والے کے لئے جو دن بہت گرم ہے وہ چنّئی (Chennai) کے رہنے والے کے لئے گرم نہیں ہے۔

لیکن ریاضی کے بیان مبہم نہیں ہوتے۔ ریاضی میں ایک بیان جب ہی قابلِ قبول یا معقول ہوگا جب یا تو وہ ہمیشہ صحیح ہو یا ہمیشہ غلط۔ اور جب یہ ہمیشہ صحیح ہو تو ہم کہتے ہیں کہ یہ ایک صحیح بیان ہے اسی طرح سے اگر یہ ہمیشہ غلط ہے، تو ہم کہتے ہیں کہ یہ ایک غلط بیان ہے۔

مثال کے طور پر $5+2=7$ ہمیشہ صحیح ہے، اس لئے $5+2=7$ ایک صحیح بیان ہے۔ $5+3=7$ ہمیشہ ایک غلط بیان ہے اس لئے $5+3=7$ ایک غلط بیان ہے۔

مثال 2: بیان کیجیے کہ آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط:

(i) مثلث کے داخلی زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہے۔

(ii) ہر 1 سے بڑا طاق عدد مفرد ہے۔

(iii) کسی بھی حقیقی عدد x کے لئے $4x + x = 5x$

(iv) کسی بھی حقیقی عدد x کے لئے $2x > x$

(v) کسی بھی حقیقی عدد x کے لئے $x^2 \geq x$

(vi) اگر کسی چار ضلعی کے تمام اضلاع مساوی ہوں تو یہ مربع ہوتا ہے

حل:

(i) یہ بیان درست ہے۔اس کو آپ باب 6 میں پہلے ہی ثابت کر چکے ہیں۔

(ii) یہ بیان غلط ہے، مثال کے طور پر 9 مفرد نہیں ہے۔

(iii) یہ بیان ہمیشہ صحیح ہے۔

(iv) یہ بیان غلط ہے مثال کے طور پر $2 \times (-1) = -2$ اور -2، -1 سے بڑا نہیں ہے۔

(v) یہ بیان غلط ہے، مثال کے طور پر $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ اور $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{2}$ سے بڑا نہیں ہے۔

(vi) یہ بیان غلط ہے، کیوں کہ متعین کے بھی اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔لیکن یہ ضروری نہیں کہ یہ مربع ہو۔

آپ نے یہ بات نوٹ کی ہوگی کہ کسی بیان کو ریاضی میں یہ ثابت کرنے کے لئے کہ یہ صحیح نہیں ہے۔صرف ایک مثال دینی ہوتی ہے جہاں یہ صحیح نہیں ہو۔اس لئے (ii) میں، کیوں کہ 9 مفرد نہیں ہے۔یہ وہ مثال ہے جو یہ ثابت کرتی ہے کہ بیان "1 سے بڑا ہر طاق عدد مفرد ہوتا ہے"، صحیح نہیں ہے۔ایسی مثالیں جو بیان کو برعکس (counter) ثابت کرتی ہیں برعکس مثالیں (counter example)، ہم برعکس مثالوں کے بارے میں سیکشن A1. 5 میں تفصیل سے پڑھیں گے۔

آپ نے یہ بھی نوٹ کیا ہوگا کہ حالاں کہ بیانات (iv)، (v) اور (vi) غلط ہیں لیکن اس کو صحیح بنانے کے لئے اِس میں کچھ شرائط لگا کر دوبارہ بیان کر سکتے ہیں۔

مثال 3: مندرجہ ذیل بیانات کو مناسب شرائط کے ساتھ اس طرح دوبارہ بیان کیجیے کہ یہ درست ہو جائیں۔

(i) کسی بھی حقیقی عدد x کے لئے $2x > x$

(ii) کسی بھی حقیقی عدد کے لئے $x^2 \geq x$

(iii) اگر کسی عدد کو خود اس سے تقسیم کریں تو آپ کو 1 حاصل ہوگا۔

(iv) دائرہ کے کسی نقطہ پر اس کے وتر کے ذریعہ بنایا گیا زاویہ 1 ہے۔

(v) اگر کسی چار ضلعی کے تمام اضلاع مساوی ہیں تو یہ مربع ہے۔

حل:

(i) اگر $x > o$ ہو تو $2x>x$

(ii) اگر $x \geq 1$ یا $x \leq 0$ تب $x^2 \geq x$

(iii) صفر کے علاوہ اگر کسی عدد کو اسی سے تقسیم کیا جائے تو ایک 1 حاصل ہوگا۔

(iv) دائرہ کا قطر دائرہ کے کسی بھی نقطہ پر 90 کا زاویہ بناتا ہے۔

(v) اگر کسی چار ضلعی کے تمام اضلاع اور داخلی زاویہ مساوی ہوں تو وہ مربع ہوگا۔

مشق A1.1

1. بیان کیجیے کہ آیا مندرجہ ذیل بیانات ریاضی کے طور پر قابلِ قبول ہیں یا نہیں۔ اپنے جواز بھی پیش کیجیے۔

(i) ایک سال میں 13 مہینہ ہوتے ہیں

(ii) دیوالی جمعہ کی ہے

(ii) مگادی میں درجہ حرارت 25 c ہے

(iv) زمین ایک چاند ہے

(v) کتے اُڑ سکتے ہیں

(vi) فروری میں 28 دن ہوتے ہیں۔

2. بیان کیجیے کہ آیا مندرجہ ذیل بیانات صحیح ہیں یا غلط۔ اپنے جوابات کی وجوہات بھی بتائیے۔

(i) ایک چار ضلعی کے داخلی زاویوں کا حاصل جمع 350^0 ہے

(ii) کسی بھی حقیقی عدد x کے لئے $x^2 \leq 0$

(iii) معین ایک متوازی اضلاع ہے

(iv) دو جفت اعداد کا حاصل جمع جفت ہوتا ہے۔

(v) دو طاق اعداد کا حاصل جمع طاق ہوتا ہے۔

3. مناسب شرائط کے ساتھ مندرجہ ذیل بیانات کو اس طرح دوبارہ بیان کریں کہ یہ درست ہو جائیں۔

(i) تمام مفرد اعداد طاق ہوتے ہیں

(ii) کسی حقیقی عدد کا دُگنا ہمیشہ جفت ہوتا ہے

(iii) کسی بھی x کے لئے، $3x + 1 > 4$

(iv) کسی بھی x کے لئے، $x^3 \geq 0$

(v) ہر مثلث میں وسطانیہ زاویائی ناصف بھی ہوتا ہے۔

A1.3: استنباطی دلائل (Deductive Reasoning)

کسی غیر مبہم بیان کی سچائی کو ثابت کرنے کے لئے استعمال ہونے والا منطقی اوزار ہیں استنباطی دلائل، استنباطی دلائل کو سمجھنے کے لیے ہم ایک پہیلی سے شروع کرتے ہیں جس کو آپ کو حل کرنا ہے۔

آپ کو چار کارڈ دئے ہوئے ہیں ہر ایک کارڈ کے ایک طرف عدد چھپے ہوئے ہیں اور دوسری طرف حروف

A	V	6	5

فرض کیجیے کہ آپ کو بتایا گیا ہے یہ مندرجہ ذیل اصول پر عمل کرتے ہیں۔

اگر کارڈ کے ایک طرف جفت عدد ہے تو اس کے دوسری طرف ایک vowel ہوگا۔

آپ کو کارڈ کے کون سے چھوٹے سے چھوٹے عدد کی ضرورت ہوگی یہ جانچ کرنے کے لئے یہ اصول درست ہے؟

بے شک آپ کو تمام کارڈ کو پلٹ کر دیکھنے اور جانچ کرنے کا اختیار ہے۔ کیا آپ کے کچھ ہی کارڈوں کو پلٹ کر دیکھنے سے مسئلہ حل ہو جائے گا؟

نوٹ کیجیے کہ مندرجہ بالا دئے گئے بیان میں یہ بتایا گیا ہے کہ اگر کارڈ کے ایک طرف جفت عدد ہے تو دوسری طرف اس کے ایک واویل ہوگا۔ یہ نہیں بیان کیا گیا کہ ایک کارڈ جس کو ایک طرف مصوّتہ (Vowel) ہے اس کے دوسری طرف جفت عدد ہی ہوگا۔ یہ بھی ہو سکتا ہے اور نہیں بھی۔ اس اصول میں یہ بھی نہیں بیان کیا گیا کہ اگر کسی کارڈ کے ایک طرف طاق عدد ہو تو اس کے دوسری طرف ایک مصمّتہ (Consonant) ہوگا۔ یہ ہو بھی سکتا ہے اور نہیں بھی۔

تو کیا ہمیں 'A' کو پلٹ کر دیکھنے کی ضرورت ہے؟ نہیں۔ کیوں کہ دوسری طرف جفت عدد ہو یا طاق یہ اُصول صادق ہے۔ '5' کے بارے میں کیا خیال ہے۔ دوبارہ ہمیں اس کو پلٹنے کی ضرورت نہیں ہے کیوں کہ دوسری طرف چاہے مصوتہ (Vowel) ہو یا مصمّتہ (Consonant) اس سے اصول کی صداقت پر کوئی فرق نہیں پڑتا۔ لیکن آپ V اور 6 کو پلٹنے کی ضرورت ہے۔ کیوں کہ اگر V کے دوسری طرف جفت عدد ہے تب اصول ٹوٹ جاتا ہے۔ اسی طرح سے اگر 6 کے دوسری طرف مصمّتہ (Consonant) ہے تو اصول

جائے گا۔

اس پہیلی کوحل کرنے کے لئے ہم نے جن دلائل کا استعمال کیا ہے اسے استنباطی دلائل کہتے ہیں۔اسے استنباطی اس لئے کہتے ہیں کیوں کہ ہم اس نتیجہ تک (استنباط کرکر) یا بیان تک سابقہ درست بیانوں پر منطق کا استعمال کر کے پہنچے ہیں۔مثال کے طور پر مذکورہ بالا پہیلی میں منطقی دلائل کے سلسلہ سے ہم نے یہ استنباط کیا ہمیں v اور 6 کو پلٹ کر دیکھنے کی ضرورت ہے۔

استنباطی دلائل ہمیں یہ نتیجہ نکالنے میں بھی مدد کرتے ہیں کہ ایک مخصوص بیان درست ہے کیونکہ یہ ایک عمومی بیان، جو صحیح مانا جاتا ہے، کی مخصوص شکل ہے۔مثال کے طور پر اگر ہم ایک بار ثابت کر دیئے ہیں کہ دو طاق اعداد کا حاصل ضرب ہمیشہ طاق ہوتا ہے تب ہم 134563×70001 کے سلسلہ میں فوراً (بغیر تعجب کیے) یہ نتیجہ اخذ کر لیتے ہیں کہ یہ حاصل ضرب طاق ہے کیونکہ 70001 اور 134563 دونوں ہی طاق ہیں۔

استنباطی دلائل صدیوں سے انسانی سوچ کا حصہ رہے ہیں اور روزمرّہ زندگی میں انکا استعمال ہمیشہ سے ہوتا رہا ہے۔مثال کے طور پر فرض کیجیے بیانات ''پھول سولارس، تب کھلے گا جب پچھلے دن درجۂ حرارت 28c سے زیادہ رہا ہو'' اور ''سولارس پھول تصوراتی وادی میں 15 ستمبر 2005 کو کھلا تھا، درست ہے۔تب ہم استنباطی دلائل کا استعمال کر کے ہم کہہ سکتے ہیں کہ 14 ستمبر 2005 کو imaginary valley میں درجہ حرارت 28^0c سے زیادہ تھا''۔

بدقسمتی سے ہم اپنی روزمرّہ زندگی میں ہمیشہ صحیح دلائل کا استعمال نہیں کرتے۔ہم اکثر ایسے نتیجہ نکال لیتے ہیں جن کا انحصار غلط دلائل پر ہوتا ہے۔مثال کے طور پر اگر آپ کی دوست کسی دن آپ کو دیکھ کر مسکراتی نہیں تو آپ نتیجہ اخذ کر لیتے ہیں کہ وہ ناراض ہے۔جب کہ یہ بیان اگر مجھ سے ناراض ہے تو مجھے دیکھ کر مسکرائے گی نہیں'' درست بھی ہوسکتا ہے یہ بھی درست ہوسکتا ہے کہ ''اگر اس کے سر میں بہت درد ہے تو وہ مجھے دیکھ کر مسکرائے گی نہیں''۔آپ کیوں نہیں جانچ کر لیتے کہ کچھ نتائج جن تک آپ اپنی روزمرّہ زندگی میں پہنچتے ہیں آیا ان کی بنیاد کوئی معقول دلائل ہیں یا غلط؟

مشق 1.2A

1. مندرجہ ذیل کا جواب دینے کے لئے استنباطی دلائل کا استعمال کیجیے۔

(i) انسان mammal ہے، تمام mammal ہڈی والے (verlebrates) ہوتے ہیں۔ان دو بیانوں کو بنیاد بنا کر انسانوں کے بارے میں کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

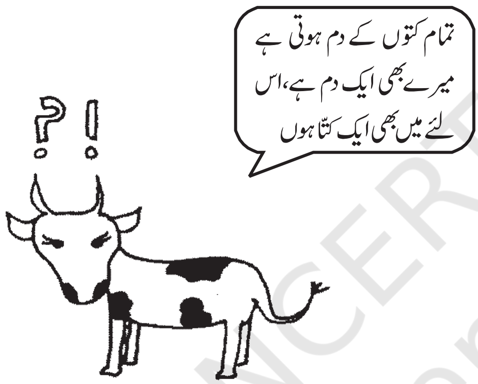
(ii) انتھونی ایک نائی ہے۔دنیش نے اپنے بال کٹوائے۔کیا آپ یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ انتھونی نے دنیش کے بال

کاٹے؟

(iii) Martians کی زبانیں لال ہوتی ہیں، Gulag ایک Martian ہے۔ ان دو بیانوں کی بنیاد پر Gulag کے بارے میں آپ کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں۔

(iv) اگر کسی خاص دن 4 گھنٹہ سے زیادہ بارش ہوتی ہے، تو گٹر Gutters کو اگلے دن صاف ہو جانا چاہئے۔ آج 6 گھنٹے تک بارش ہوئی۔ کل گٹر کی حالت کے بارے میں آپ کیا نتیجہ اخذ کریں گے؟

(v) مندرجہ ذیل کارٹون میں گائے کے دلائل میں غلطی کیا ہے۔



2. ایک بار پھر آپ کو چار کارڈ دیے گئے ہیں۔ ہر ایک کارڈ کے ایک طرف ایک حرف ہے اور دوسری طرف ایک عدد، مندرجہ ذیل اصول کی صداقت کے لئے آپ کو کون سے دو کارڈوں کو پلٹنے کی ضرورت ہے۔ اگر کسی کارڈ کے ایک طرف ایک consonant ہے تو اس کے دوسری طرف ایک طاق عدد ہوگا:

B	3	U	8

A1.4: مسئلے، قیاس اور بدیہات (Theorem, Conjectures and Axioms)

ابھی تک ہم نے بیانات اور ان کی معقولیت کی جانچ کس طرح کی جاتی ہے، کا مطالعہ کیا ہے۔ اس سیکشن میں آپ تین مختلف قسم کے بیانات جن سے ریاضی کی تشکیل ہوئی، جیسے مسئلہ، قیاس اور بدیہہ، کے بارے میں مطالعہ کریں گے اور ان کے درمیان فرق کو واضح کرنے کی کوشش کریں گے۔

آپ کا سابقہ پہلے بہت سے مسئلوں سے پڑ چکا ہے، تو اس لئے بتایئے مسئلہ کیا ہے؟ ایک ریاضیاتی بیان جس کی سچائی کو

ثابت کیا جا چکا ہو مسئلہ کہلاتا ہے۔مثال کے طور پر مندرجہ ذیل بیانات مسئلہ ہیں جیسے کہ آپ سیکشن A1.5 میں دیکھیں گے۔

مسئلہ A1.1: مثلث کے داخلی زاویوں کا حاصل جمع 180 ہوتا ہے۔

مسئلہ A1.2: دو جفت فطری اعداد کا حاصل ضرب جفت ہوتا ہے۔

مسئلہ A1.3: تین مسلسل جفت فطری اعداد کا حاصل ضرب 16 سے منقسم ہے۔

قیاس' ایک بیان ہے جس پر ہم یقین کرتے ہیں کہ یہ سچ ہے۔جن کی بنیاد ہماری ریاضی کے سمجھ اور تجربہ ہے۔ یعنی ہمارا ریاضیات وجدان۔قیاس کبھی کبھی صحیح یا غلط بھی ہوسکتا ہے۔جب ہم اس کو ثابت کردیتے ہیں تو یہ ایک مسئلہ (Theorems) بن جاتا ہے۔ریاضی دان اکثر ذہانت سے بھرپور ریاضیاتی اندازہ لگا کر اور کچھ نمونوں (patterns) کو دیکھ کر قیاس لگاتے آئے ہیں کچھ پیٹرن کو دیکھتے ہیں اوران کو دیکھ کر کس قسم کے ذہانت سے بھرپور اندازہ ہم لگا سکتے ہیں۔

مثال 4: کوئی سی تین مسلسل جفت اعداد لیجئے اوران کو جمع کیجیے جیسے:

2+4+6=12, 4+6+8=18, 6+8+10+24, 8+10+12=30, 20+22+24=66

ان حاصل جمع میں کیا آپ کوئی خاص پیٹرن دیکھ رہے ہیں؟ آپ ان کے بارے میں کیا قیاس کر سکتے۔

حل: ایک قیاس ہوسکتا ہے (i) تین مسلسل جفت اعداد کا حاصل جمع جفت ہے۔

دوسرا ہوسکتا ہے (ii) تین مسلسل جفت اعداد کا حاصل جمع 6 سے منقسم ہے۔

مثال 5: مندرجہ ذیل اعداد کے کا پیٹرن غور پر کیجیے۔جو پاسکل کا مثلث کہلاتا ہے۔

خط		اعداد کا حاصل جمع
1	1	1
2	1 1	2
3	1 2 1	4
4	1 3 3 1	8
5	1 4 6 4 1	16
6	1 5 10 10 5 1	32
7	: :	:
8	: :	:

خطوط 7 اور 8 میں آپ اعداد کے حاصل جمع کے بارے میں کیا قیاس کرسکتے ہیں؟ خط 21 میں اعداد کا حاصل جمع کیا ہوگا؟ آپ کیا پیٹرن دیکھتے ہیں؟ خط x میں اعداد کے حاصل جمع کے ایک فارمولہ کا حاصل جمع کا اندازہ کیجیے

حل: خط 7 میں اعداد کا حاصل جمع ہے $2x32 = 64 = 2^6$

خط 8 میں اعداد کا حاصل جمع ہے $2x64 = 128 = 2^7$

خط 21 میں اعداد کا حاصل جمع ہے $= 2^{20}$

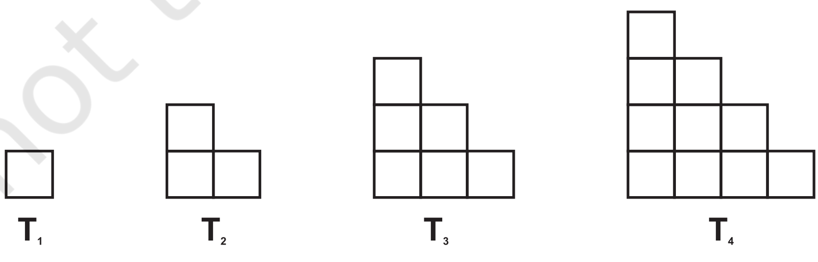
خط n میں اعداد کا حاصل جمع ہے $= 2^{n-1}$

مثال 6: ایسے ہی کہے جانے والے مثلثی اعداد Tn پر غور کیجیے۔

شکل A1.1

یہاں ڈاٹ اس طرح سے ترتیب دیے گئے ہیں کہ یہ ایک مثلث بناتے ہیں۔ یہاں $T_1 = 1$، $T_2 = 3$، $T_3 = 6$، $T_4 = 10$ اور آگے تک ایسے ہی۔ کیا آپ Ts کا اندازہ کرسکتے ہیں؟ Ts کے بارے میں کیا خیال ہے؟ Tn کے بارے میں کیا خیال ہے۔

اگر آپ ان کو مندرجہ ذیل طریقہ سے دوبارہ بنائیں تو یہ آپ کے لئے مددگار ثابت ہوں گے۔



شکل A.1.2

حل:

$$T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5 \times 6}{2}$$

$$T_6 = 1 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \frac{6 \times 7}{2}$$

$$Tn = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

قیاس کی ایک پسندیدہ مثال جو کھلی ہوئی ہے (یعنی اس کو صحیح یا غلط ثابت نہیں کیا جاسکتا) گولڈ بیچ قیاس ہے جو ایک مشہور ریاضی دان کریسٹن گولڈ بیچ (1690-1764) کے نام پر ہے۔ اس قیاس کی رو سے 4 سے بڑے ہر جفت صحیح عدد کو دو طاق مفرد اعداد کے حاصل جمع کے طور پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ شاید آپ اس نتیجہ کو صحیح یا غلط ثابت کرسکیں تو آپ کو شہرت مل جائے گی۔

آپ متحیر ہوں گے۔ ریاضی میں ہمارا جس چیز سے بھی واسطہ پڑتا ہے تو اس کو ثابت کرنے کی ضرورت ہوتی ہے، اگر نہیں تو کیوں نہیں؟

حقیقت یہ ہے کہ ریاضی کے ہر پہلو کی بنیاد کچھ بیانات پر ہوتی ہے جو صحیح فرض کئے جاتے ہیں اور ان کو ثابت کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی۔ یہ خود ساختہ سچائی ہیں۔ جن کو ہم بغیر ثبوت کے صحیح مانتے ہیں۔ ایسے بیانات بدیہیات کہلاتے ہیں۔ باب 5 میں آپ نے اقلیدس کے موضوعات اور بدیہات کے بارے میں پڑھا ہوگا (آج کل ہم بدیہات اور موضوعات میں فرق نہیں کرتے۔ مثال کے طور پر اقلیدس کا پہلا موضوع ہے)۔

ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک ایک خط مستقیم کھینچا جاسکتا ہے۔

اور تیسرا موضوع:

کسی بھی مرکز اور کسی بھی نصف قطر کا دائرہ بنایا جاسکتا ہے۔

یہ بیانات بظاہر بالکل صحیح ہیں اور اقلیدس نے ان کو صحیح مانا ہے۔ کیوں؟ کیوں کہ ہر ایک چیز کو ہم ثابت نہیں کر سکتے ہمیں کہیں سے تو شروع کرنے کی ضرورت ہے۔ ہمیں کچھ بیانات کی ضرورت ہے جن کو صحیح کے طور پر قبول کرتے ہیں اور پھر ان بیانات کو بنیاد بنا کر اور منطق کے اصولوں کو استعمال کر کے اپنی معلومات میں اضافہ کرتے ہیں۔

آپ کو اس بات پر بھی حیرت ہوگی کہ ہم تمام بیانات کو صحیح کیوں نہیں مانتے جب کہ وہ خود ساختہ ظاہر ہوتے ہیں۔ اس کی بہت سی وجوہات ہیں اکثر ہمارا وجدان غلط ہو سکتا ہے۔ کبھی کبھی تصاویر اور نمونہ دھوکا دیتے ہیں اور مستحکم ہونے کے لئے یہ ضروری ہے کہ جو صحیح ہو اس کو ثابت کیا جائے۔ مثال کے طور پر ہم میں سے بہت سے لوگ یہ یقین کرتے ہیں کہ اگر کسی عدد کو دوسرے عدد سے ضرب کیا جائے تو حاصل ضرب دونوں اعداد سے بڑا ہوگا لیکن ہم جانتے ہیں کہ یہ ہمیشہ صحیح نہیں ہے مثال کے طور پر $5\times0.2=1$ جو کہ 5 سے کم ہے۔

مندرجہ ذیل شکل کو دیکھیے، کون سا قطعہ خط لمبا ہے AB یا CD؟

شکل A1.3

حالانکہ خط AB چھوٹا لگتا ہے لیکن پتہ یہ چلا کہ دونوں یکساں لمبائی کے ہیں۔

آپ پھر بدیہات کی معقولیت پر متحیر ہوں گے، بدیہات کو ہمارے وجدان کی بنیاد پر چنا گیا ہے۔ اور جو خود ساختہ (self-evident) ہیں۔ اس لئے ہم توقع کرتے ہیں کہ یہ سچ ہوں گے، حالانکہ یہ ممکن ہے کہ بعد میں یہ دریافت ہو کہ یہ صحیح نہیں ہیں۔ اس سے بچنے کا کیا طریقہ ہے؟ ہم مندرجہ ذیل اقدام لیتے ہیں۔

(i) بدیہات کی تعداد کو کم سے کم لیں مثال کے طور پر اقلیدس کے 5 موضوعہ اور بدیہات کی بنیاد پر ہم سینکڑوں مسئلہ نکال سکتے ہیں۔

(ii) اس بات کا پختہ یقین کر لیجیے کہ بدیہات تابع ہوں۔

ہم کہتے ہیں کہ بدیہات کا مجموعہ غیر تابع (inconsistent) ہے۔ اگر ہم ایک بدیہہ کو استعمال کر کے یہ دکھا سکیں

کہ دوسرا صحیح نہیں ہے۔ مثال کے طور پر مندرجہ ذیل دو بیانات پر غور کیجیے۔ ہم دکھائیں گے کہ یہ غیر تابع ہیں۔

بیان 1: کوئی بھی مکمل عدد اپنے جانشین کے برابر نہیں ہوتا۔

بیان 2: 0 سے تقسیم ہونے والا مکمل عدد بھی مکمل عدد ہے۔

یاد کیجیے: 0 سے تقسیم معروف نہیں ہے۔ لیکن ایک لمحہ کے لئے ہم یہ فرض کر لیتے ہیں کہ ایسا نہیں ہے اور دیکھتے ہیں کہ کیا ہوتا ہے۔

بیان 2 کے لئے ہمیں ملے گا $a = \frac{1}{0}$ جہاں a ایک مکمّل عدد ہے اس کا مطلب ہے کہ $1 = 0$ لیکن بیان 1 کی تردید کرتا ہے جس کی رو سے کوئی بھی مکمل عدد اپنے جانشین کی برابر نہیں ہوتا۔

(iii) ایک غلط بدیہہ جلدی یا دیر میں ایک تضاد کی شکل میں سامنے آتا ہے ہم کہتے ہیں کہ یہ ایک تضاد ہے۔ جب ہمیں ایک ایسا بیان حاصل ہوتا ہے جس میں وہ بیان اور اس کا منفی دونوں درست ہوں مثال کے طور پر اوپر دئے گئے دو بیانوں 1 اور 2 پر ایک بار پھر غور کرتے ہیں۔

بیان 1 کے لئے یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ $1 \neq 2$

اب $x^2 - x^2$ کو دیکھیے، ہم اس کو دو طریقوں سے اجزائے ضربی میں تحلیل کر سکتے ہیں۔

$$x^2 - x^2 = x\,(x - x) \qquad \text{(i)}$$

اور

$$x^2 - x^2 = (x + x)\,(x - x) \qquad \text{(ii)}$$

بیان 2 میں سے ہم $(x - x)$ کو دونوں طرف منسوخ کر سکتے ہیں۔

اس طرح سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $x = 2x$ جس کا مطلب ہے $2=1$

اس طرح سے ہمارے پاس دونوں بیان $1 \neq 2$ اور اس کا انکار (منفی) $1=2$ درست ہیں۔ یہ ایک تضاد ہے۔ یہ تضاد کس وجہ سے آیا غلط بدیہہ کی وجہ سے یعنی صفر سے تقسیم ہونے والا مکمّل عدد بھی مکمل عدد ہوتا ہے۔

اس لئے بدیہیوں کے لئے بیانات چننے میں کافی غور وفکر اور بصیرت کی ضرورت ہوتی ہے۔ ہمیں یہ یقین دہانی کرانی چاہئے کہ یہ کسی منطقی تضاد تک نہ لے جائے۔ جب کہ کبھی کبھی بدیہہ کے انتخاب سے بہت سی دریافت رونما ہو جاتی ہیں۔ باب 5 میں اقلیدس کے پانچویں موضوع سے آپ واقف ہیں جس سے غیر اقلیدس جیومیٹریاں دریافت ہوئیں۔ آپ نے دیکھا کہ بہت سے ریاضی داں اس بات پر یقین رکھتے ہیں کہ پانچویں موضوع کو موضوع نہیں ہونا چاہئے بلکہ ایک مسئلہ ہونا

چاہئے۔ جس کو پہلے چار موضوعوں کا استعمال کر کے ثابت کیا جا سکتا ہے۔ حیرت کی بات یہ ہے ایسی ہی کچھ کوششوں کی وجہ سے غیر یولکڈ جیومیٹریوں کی دریافت ہوئی۔

اس سیکشن کا اختتام ہم بدیہہ، مسئلہ اور قیاس کے فرق کو واضح کر کے کرتے ہیں۔ بدیہہ ایک ریاضیاتی بیان ہے جو بغیر ثبوت کے صحیح فرض کیا جاتا ہے۔ قیاس ایک ریاضیاتی بیان ہے جس کی سچائی یا جھوٹ اب تک طے نہ کیا گیا ہو، مسئلہ ایک ریاضیاتی سچائی ہے منطقی طور پر طے کی جا چکی ہے۔

مشق 1.3A

1. کوئی تین مسلسل جفت اعداد لیجیے اور ان کا حاصل ضرب معلوم کیجیے۔ مثال کے طور پر $2\times4\times6=48$، $4\times6\times8=192$ اور آگے تک ان حاصل ضربوں کے لئے تین قیاس بنائیے۔

2. پاسکل کے مثلث کی طرف واپس جائیں۔

$1 = 11^0$: خط 1

$11 = 11^1$: خط 2

$121 = 11^2$: خط 3

خط 4 اور خط 5 کے لئے قیاس بنائیے۔ کیا آپ کا قیاس درست ہے؟ کیا آپ کا قیاس خط 6 کے لئے بھی درست ہے۔

3. اس لئے دوبارہ مثلثی اعداد (شکل A1.2 کو دیکھتے) کو دیکھیں۔ دو مثلثی اعداد اس میں جمع کریں $T_1 + T_2 = 4$، $T_2 + T_3 = 9$، $T_3 + T_4 = 16$، ? $T_4 + T_5$ کے بارے میں آپ کیا خیال ہے؟

$T_{n-1} + T_n$ کا ایک قیاس بنائیے

4. مندرجہ ذیل پیٹرن کو دیکھیے

$$1^2 = 1$$
$$11^2 = 121$$
$$111^2 = 12321$$
$$1111^2 = 1234321$$
$$11111^2 = 123454321$$

مندرہ ذیل ہر ایک کا ایک قیاس بنایئے

$111111^2 =$

$1111111^2 =$

جانچ کیجیے کہ آپ کا قیاس درست ہے۔

5. اس کتاب میں استعمال ہوئے 5 بدیہات (موضوع) کی فہرست بنایئے۔

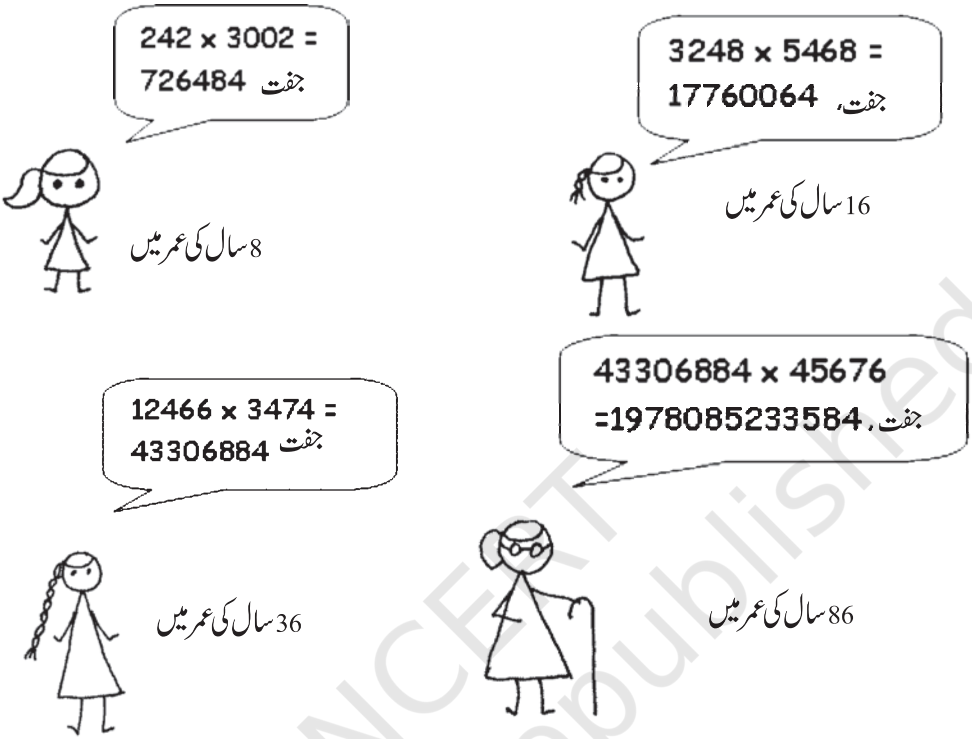
A1.5 ریاضیاتی ثبوت کیا ہے؟

آیئے اب ثبوتوں کے مختلف پہلوؤں پر غور کرتے ہیں۔ ہم تصدیق اور ثبوت کے درمیان فرق کی سمجھ سے شروعات کرتے ہیں۔ ریاضی کے ثبوت کے مطالعہ سے پہلے آپ سے بیانات کی تصدیق کے لئے خاص طور سے کہا گیا۔

مثال کے طور پر آپ سے کہا جا سکتا ہے کہ مثال کے ساتھ تصدیق کیجیے کہ دو جفت اعداد کا حاصل ضرب جفت ہے۔ اس لئے آپ بلا منصوبہ دو جفت اعداد کو چنئے۔ جیسے 24 اور 2006 لیجیے اور جانچ کیجیے کہ یہ حاصل ضرب $24 \times 2006 = 48144$ جفت ہے۔ ایسا ہی آپ دوسری بہت سی مثالوں کے لئے کر سکتے ہیں۔

مزید آپ سے یہ بھی کہا جا سکتا ہے اپنی کلاس میں مشغلہ کے طور پر بہت سے مثلث بنایئے اور ان کے داخلی زاویوں کا حاصل جمع معلوم کیجیے۔ پیمائش کی غلطیوں کو علیحدہ کرتے ہوئے آپ دیکھیں گے کہ مثلث کے داخلی زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہے۔

اس طریقہ میں کمی کیا ہے؟ تصدیق کے عمل میں بہت سے مسائل ہیں۔ جب کہ اس کی مدد سے آپ کے بیان کو درست بنا سکتے ہیں جیسا آپ یقین کرتے ہیں۔ تمام حالتوں میں آپ پر یقین نہیں ہوتے کہ وہ درست ہوں گے۔ مثال کے طور پر بہت سے جفت اعداد کے جوڑوں کی ضرب سے ہم اندازہ کر سکتے ہیں کہ دو جفت اعداد کا حاصل ضرب جفت ہوگا۔ لیکن اس سے یہ بات پر اعتماد طور پر نہیں کہی جا سکتی کہ جفت اعداد کے جوڑوں کا حاصل ضرب ہمیشہ جفت ہی ہوگا۔ کیوں کہ آپ بظاہر تمام ممکن جفت جوڑوں کے حاصل ضرب کی جانچ نہیں کر سکتے۔ اگر آپ ایسا کر سکیں تو آپ کارٹون کی اس لڑکی کی طرح ہیں اپنی تمام زندگی جفت اعداد کے حاصل ضرب کی تحسیب ہی کرتے رہیں گے اسی طرح سے کچھ ایسے مثلث بھی ہو سکتے ہیں جو آپ نے ابھی تک نہیں بنائے ہوں جن کے داخلی زاویوں کا حاصل جمع 180^0 نہ ہو۔ ہم تمام ممکنہ مثلثوں کے داخلی زاویوں کی پیمائش نہیں کر سکتے۔



تصدیق اکثر غلط رہنمائی کرتی ہے۔ مثال کے طور پر سابقہ تصدیق کی بنیاد پر ہم پاسکل کے مثلث سے یہ نتیجہ اخذ کرنے (مشق 1.3A کا Q2) کی کوشش کر سکتے ہیں کہ $11^5 = 15101051$ لیکن حقیقت میں $11^5 = 161051$ اس لئے کچھ سوالوں کے لئے آپ کو دوسرے طریقوں کی ضرورت ہے جو تصدیق پر منحصر نہ ہوں۔ ایک اور طریقہ جس کا نام ہے بیان کو ثابت کرنا'' ایک ایسا عمل جو کسی ریاضیاتی بیان کی صداقت کو منطقی دلائل سے قائم کر سکیں ریاضیاتی ثبوت کہلاتا ہے۔

سیکشن 1.2 A کی مثال 2 میں آپ نے دیکھا کسی بیان کو غلط ثابت کرنے کے لئے یہ کافی ہوگا کہ ایک برعکس مثال(counter-example) پیش کردی جائے اس لئے جب کہ کسی ریاضیاتی بیان کی صداقت ہزاروں سوالوں کی تصدیق اور جانچ سے قائم نہیں کی جاسکتی لیکن کسی بیان کو جھوٹا ثابت کرنے کے لئے صرف ایک برعکس مثال کافی ہوتی ہے۔ یہ نقطہ اچھی طرح سے سمجھ لینا چاہیے۔

ایک ریاضیاتی بیان کو جھوٹا ثابت کرنے کے لئے صرف ایک برعکس مثال کافی ہے۔

اس لئے 12=5+7 اس بیان کی کہ دو طاق اعداد کا حاصل جمع طاق ہوتا ہے ایک برعکس مثال ہے۔

آ ییۓ ثبوت کے بنیادی اجزائے ترکیبی پر غور کرتے ہیں۔

(i) کسی مسئلہ کو ثابت کرنے کے لئے ہمارے پاس ایک رف آئیڈیا ہو چاہئیے کہ ہم کیسے آگے بڑھیں؟

(ii) جو اطلاعات ہمیں مسئلہ میں پہلے ہی دی ہوئی ہوں (یعنی مفروضہ) ان کو واضح طور پر سمجھنا اور استعمال کرنا چاہئیے۔

مثال کے طور پر مسئلہ 1.2A میں، جس میں ہے کہ دو جفت اعداد کا حاصل ضرب جفت ہے، ہمیں دو جفت فطری اعداد دئے ہوئے ہیں اس لئے ہمیں ان کی خصوصیات کا استعمال کرنا ہے۔ جز ضربی کے مسئلہ میں (باب 2 میں) آپ کو ایک کثیر رکنی $P(x)$ دی ہوئی ہے اور یہ بتایا گیا ہے کہ P=O۔ آپ یہ دکھانے کے لئے کہ $(x\text{-a})$، $P(x)$ کا جز وضربی ہے۔ آپ کو اس کا استعمال کرنا ہے۔ اسی طریقہ سے جز وضربی کے مسئلہ کے معکوس کے لیے آپ کو $(x\text{-a})$ ‘$P(x)$ کا جز و ضربی دیا ہوا ہے اور آپ کو $P(a)=0$ دکھانے کے لئے اس مفروضہ کا استعمال کرنا ہے۔

مسئلہ کو ثابت کرتے وقت آپ عملیات کا استعمال بھی کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر یہ ثابت کرنے کے لئے کہ مثلث کے داخلی زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہوتا ہے۔ ہم ایک خط مثلث کے ایک راس سے گذرتا ہوا سامنے والے ضلع کے متوازی کھینچتے ہیں اور پھر متوازی خطوط کی خصوصیات کو استعمال کرتے ہیں۔

(ii) ایک ثبوت مسلسل مسلسلہ وار ریاضیاتی بیانات سے مل کر بنا ہوتا ہے۔ ثبوت کا ہر ایک بیان، ثبوت میں موجود یا تو پچھلے بیان سے منطقی طور پر اخذ کیا جاتا ہے۔ یا پچھلے مسئلہ یا ایک بدیہہ یا اپنے مفروضہ سے اخذ کیا جاتا ہے۔

(iv) صحیح ریاضیاتی بیانوں کے سلسلہ کو منطقی طور پر صحیح ترتیب پر رکھنے کو نتیجہ وہ ہوتا جو ہم ثابت کرنا چاہتے ہیں۔ یعنی جس کا مسئلہ

میں وعدہ کیا گیا ہے۔

ان اجزائے ترکیبی کو سمجھنے کے لئے مسئلہ اور اس کے ثبوت کا تجزیہ کرتے ہیں۔

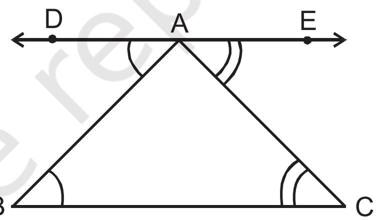
آپ اس مسئلہ کا پہلے ہی باب 6 میں مطالعہ کر چکے ہیں۔لیکن پہلے جیومیٹری میں ثبوتوں پر کچھ فقرہ (جملے): ہم اکثر مسئلہ کو ثابت کرنے کے لئے اشکال کا سہارا لیتے ہیں جو بہت اہم ہے۔۔لیکن ثبوت میں ہر بیان کو ثابت کرنے کے لئے صرف منطق کا استعمال ہونا چاہئیے ۔اکثر ہم طلباء کو کچھ بیان کرتے ہوئے سنتے ہیں۔جیسے وہ دو زاویہ مساوی ہیں کیوں کہ ڈرائنگ میں یہ مساوی نظر آتے ہیں۔یا زاویہ 90^0 کا ہی ہونا چاہئیے ۔کیوں کہ دو خطوط ایسے دکھتے ہیں جیسے یہ ایک دوسرے پر عمود ہیں'' جو کچھ آپ نے دیکھا ہے اس دھوکے سے ہوشیار رہیے۔(یاد رکھئے شکل A1.4)

آیئے اب مسئلہ A1.1 کی طرف چلئے

مسئلہ A1.1: مثلث کے داخلی زاویوں کا حاصل جمع 180^0 ہوتا ہے۔

ثبوت: ایک ΔABC پر غور کیجیے (شکل A1.4 دیکھیے)

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^0$



شکل A1.4

A سے گذرتا ہوا BC کے متوازی ایک خط DE کھینچیے (2)

DE ‘BC کے متوازی ہے اور AB ایک قاطع ہے

اس لئے $\angle DAB$ اور $\angle ABC$ متبادل زاویہ ہیں۔اس لئے مسئلہ 6.2 اور باب 6 کی رو سے یہ مساوی ہیں۔یعنی

$\angle DAB = \angle ABC$ (3)

اسی طرح سے $\angle CAE = \angle ACB$ (4)

اس لئے $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$ (5)

لیکن $\angle DAB+\angle BAC+\angle CAE+180^{\circ}$ کیوں کہ یہ ایک زاویہ مستقیم بناتے ہیں (6)

اب ہم ثبوت کے ہر ایک قدم پر کچھ جملے کہتے ہیں۔

قدم 1: ہمارا مسئلہ مثلث کی ایک خصوصیت سے متعلق ہے اس لئے ہم ایک مثلث سے شروع کرتے ہیں

قدم 2: یہ ایک اہم خیال ہے۔ وجدانی قدم یا اس بات کی سمجھ کہ مسئلہ کو ثابت کرنے کے لئے ہمیں کیسے آگے بڑھانا ہے۔ اکثر جیومیٹری کے ثبوتوں میں عمل کی ضرورت ہوتی ہے۔

قدم 3 اور 4: یہاں ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ $\angle DAE=\angle ABC$ اور $\angle CAE=\angle ACB$ ' اس حقیقت کا استعمال کرتے ہوئے کہ BC 'DE کے متوازی ہے (ہمارا عمل) اور سابقہ ثابت کیا گیا مسئلہ جو ہے جب کوئی قاطع دو متوازی خطوط کو قطع کرتا ہے تو متبادل زاویہ مساوی ہوتے ہیں۔

قدم 5: یہاں ہم اقلیدس کا بدیہہ (باب 5 دیکھیے) استعمال کرتے ہیں جو ہے اگر مساوی چیزوں میں مساوی چیزیں جمع کی جائیں تو حاصل بھی مساوی ہوتا ہے'' یعنی

$$\angle ABC+\angle BAC+\angle ACB=\angle DAB+\angle BAC+\angle CAE$$

یعنی مثلث کے داخلی زایوں کا حاصل جمع ایک خط مستقیم پر ہے زاویوں کے حاصل جمع کے برابر ہوتا ہے۔

قدم 6: یہاں ہم باب 6 میں پڑھے ہوئے خطی جوڑے کے بدیہہ کا استعمال کرتے ہیں جو ہے ایک خط مستقیم پر بنے زاویوں کا حاصل جمع 180^{0} ہوتا ہے۔ یہ دکھانے کے لئے کہ $\angle DAB+\angle BAC+\angle CAE=180^{0}$

قدم 7: ہم اقلیدس کے بدیہہ کا استعمال کرتے ہیں جو ہے چیزیں جو کسی ایک چیز کے مساوی ہوتی ہیں آپس میں بھی مساوی ہوتی ہیں'' یہ نتیجہ اخذ کرنے کے لئے

$$\angle ABC+\angle BAC+\angle ACB=\angle DAB+\angle BAC+\angle CAE=180^{0}$$

نوٹ کیجیے قدم 7 میں دعوئی ہے جسے ہمیں ثابت کرنا تھا۔

اب ہم مسئلہ A1.2 اور 1.3 کو بغیر تجزیہ کئے بغیر ثابت کرتے ہیں۔

مسئلہ A1.2: دو جفت اعداد کا حاصل ضرب جفت ہوتا ہے۔

ثبوت: مان لیجیے x اور y دو جفت فطری اعداد ہیں

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ xy بھی جفت ہے

کیوں کہ x اور y جفت ہیں، یہ 2 سے منقسم ہے اور $x=2m$ کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

کسی فطری اعداد m کے لئے اور $y=2n$ کسی فطری عدد x کے لئے

تب $xy=4mn$ کیوں کہ 4mn بھی 2 سے منقسم ہے۔ اس لئے xy بھی دو سے منقسم ہوگا۔

اس لئے xy جفت ہے۔

مسئلہ A1.3: تین مسلسل جفت فطری اعداد کا حاصل ضرب 16 سے منقسم ہے۔

ثبوت: کوئی بھی تین مسلسل جفت فطری اعداد 2n، 2n+2 اور 2n+4 کی شکل کے ہوں گے کسی بھی فطری عدد x کے لئے۔

ہمیں ثابت کرنا ہے کہ 2x، (2x+2) اور (2n+4)2n(2n+2)، 16 سے منقسم ہے۔ اب ہمارے پاس دو حالتیں ہیں یا تو n جفت ہے یا طاق۔ اس لئے دونوں حالتوں کی جانچ کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
&2n(2n+2)(2n+4)\\
&=2+2+N(N+1)(4+2)\\
&=8N(4+1)(4+2)
\end{aligned}
$$

فرض کیجیے n جفت ہے۔ تب ہم $n=2m$ لکھ سکتے ہیں جہاں m کوئی فطری عدد ہے۔

اور پھر $2n(2n+2)\ (2n+4)=8n(n+1)\ (n+2)=16m(2m+1)\ (2m+2)$

اس لئے $(2n+4)$ $(2n+2)$ 2n، 16 س منقسم ہے۔

آگے مان لیجیے n طاق ہے تب n+1 جفت ہوگا اور ہم n+1+2r لکھ سکتے ہیں، کسی فطری عدد r کے لئے۔ تب ہمارے پاس ہے

$$2n(2n+2)\ (2n+4) = 8n\ (n+1)\ (n+2)$$

$$=8(2r\text{-}1)\ n24\,n\,(2r+1)$$

$$=16r\ (2n\text{-}1)\ (2n+1)$$

اس لئے $(2n+1)$ $(2n\_2)$ 2n، 16 سے منقسم ہے۔

اس لئے دونوں حالتوں میں ہم نے دیکھا کہ تین مسلسل جفت فطری اعداد 16 سے منقسم ہیں۔

اس باب کا اختتام ریاضی دانوں نے نتائج کی دریافت کیسے کی اور ان کے رسمی ثبوت کیسے لکھے گئے کے فرق پر کچھ ریمارک کے ساتھ کرتے ہیں۔ جیسا اوپر بیان کیا گیا ہے ہر ثبوت کا ایک اہم وجدانی خیال (کبھی کبھی ایک سے زیادہ ہے۔ وجدان ریاضی دانوں کی سوچ اور ان کے ذریعہ دریافت کئے گئے نتائج کے لئے مرکزی حیثیت رکھتا ہے۔ اکثر مسئلوں کے ثبوت ریاضی دانوں کے پاس بکھرے ہوئے پہنچتے ہیں۔ ریاضی داں اکثر سوچ اور منطق کے بہت سے راستوں اور مثالوں پر تجربہ کرتا ہے۔ اس کے بعد وہ صحیح حل یا ثبوت تک پہنچتا ہے۔ صرف تخلیقی phase کے بعد ہی اکھٹا کئے گئے تمام دلائل کو یکجا کر کے صحیح ثبوت حاصل ہوتا ہے۔ یہاں یہ بیان کرنا ضروری ہے کہ عظیم ریاضی داں سری نواسن رامانجن وجدان کی بہت اونچی سطح کو استعمال کر کے اپنے بہت سے بیانوں کی دریافت کی جو انھوں نے دعوا کیا وہ سچ تھا۔ ان میں سے بہت سے بیان سچے ثابت ہوئے اور اب وہ جانے پہچانے مسئلہ ہیں۔ حالانکہ، آج تک بھی دنیا بھر میں کچھ ریاضی داں اس کے ان دعووں کو ثابت (یا تردید) کرنے کی جدوجہد کر رہے ہیں۔

شکل A1.5

مشق A1.4

1. مندرجہ ذیل بیانوں کی تردید کرنے کے لئے برعکس مثال معلوم کیجئے:

(i) گر دو مثلثوں کے نظیری زاویہ مساوی ہیں تو مثلث متماثل ہوں گے۔

(ii) ایک چار ضلعی جس کے تمام اضلاع مساوی ہوں ایک مربع ہوتا ہے۔

(iii) ایک چار ضلعی جس کے تمام زاویہ مساوی ہوں ایک مربع ہوتا ہے۔

(iv) صحیح اعداد a اور b کے لئے $\sqrt{a^2 + 62}$

(v) تمام مثبت صحیح اعداد n کے لئے $2n^2 + 1$ مفرد ہے

2. اپنا پسندیدہ ثبوت لیجیے۔ اوپر بحث کئے گئے خطوط پر اس کا قدم بقدم تجزیہ کیجیے۔ (کیا دیا ہوا ہے۔ کیا اخذ کیا گیا ہے، کون سے مسئلہ اور بدیہیوں کا استعمال ہوا ہے وغیرہ)

3. ثابت کیجیے کہ دو طاق اعداد کا حاصل جمع جفت ہے۔

4. ثابت کیجیے کہ دو طاق اعداد کا حاصل ضرب طاق ہے۔

5. ثابت کیجیے کہ تین مسلسل جفت اعداد کا حاصل جمع 6 سے منقسم ہے۔

6. ثابت کیجیے کہ اُس خط پر جس کی مساوات $y=2x$ ہے، پر لامحدود نقطے واقع ہیں۔
(اشارہ: کسی صحیح عدد (n) کے لئے نقطہ $(n, 2n)$ پر غور کیجیے۔

7. آپ کا ایک دوست ہوگا اور اُس نے آپ سے کوئی عدد سوچنے کے لئے کہا ہوگا پھر اُس میں کچھ جمع تفریق یا ضرب کرنے کو کہا ہوگا اور پھر وہ آپ کا شروع میں سوچا ہوا عدد جانے بغیر بتا دیتا ہے کہ آپ کا تحسیب کے بعد کون سا عدد آئے گا۔ یہاں ایسی دو مثالیں ہیں۔ ثابت کیجیے کہ یہ کیسے کام کرتی ہیں۔
(i) کوئی عدد لیجیے۔ اس کو دگنا کر دیجیے۔ اس میں نو جمع کیجیے۔ اس میں ابتدائی عدد جمع کیجیے۔ تین سے تقسیم کیجیے۔ چار جمع کیجیے۔ ابتدائی عدد کو گھٹا دیجیے۔ حاصل نتیجہ 7 ہے۔
(ii) کوئی بھی تین ہندسوں والا عدد لکھیے (مثال کے طور پر 425) انھیں ہندسوں کو ایک ہی ترتیب میں دہراتے ہوئے چھ ہندسوں کا عدد بنائیے (425425) آپ نیا عدد 7، 11 اور 13 سے منقسم ہوگا۔

A1.6 خلاصہ Summary

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل نقاط کا مطالعہ کیا:

1. ریاضی میں کوئی بھی بیان قابل قبول ہوتا ہے تب یہ یا تو ہمیشہ صحیح ہو یا ہمیشہ غلط۔
2. کسی ریاضیاتی بیان کو غلط ثابت کرنے کے لئے ایک برعکس مثال کافی ہوتی ہے۔
3. بدیہات وہ بیان ہوتے ہیں جن کو بغیر ثبوت کے سچ مان لیا جاتا ہے۔
4. قیاس وہ بیان جس کو ہم اپنے ریاضیاتی وجدان کی بنیاد پر صحیح تسلیم کر لیتے ہیں لیکن جس کو ثابت کرنا باقی ہوتا ہے۔
5. ایک ریاضیاتی بیان جس کی سچائی (صداقت) کو ثابت کیا جا چکا ہو، مسئلہ (Theorem) کہلاتا ہے۔
6. ریاضیاتی بیانوں کو ثابت کرنے کا عام منطقی اوزار استنباطی استدلال ہے۔
7. ایک ثبوت مسلسل ریاضیاتی بیانوں کے سلسلہ پر مشتمل ہوتا ہے۔ ثبوت میں ہر ایک بیان پچھلے بیانوں یا ثابت کئے گئے مسئلوں یا کسی بدیہہ یا مفروضہ سے منطقی طور پر استخراج کیا جاتا ہے۔